Metodi Matematici 1 8cfu		9 febbraio2017
Cognome	**Nome**	**Matricola**

Fornire il procedimento nelle risposte alla sesta e settima domanda. Dedicare 1 foglio protocollo (da consegnare) per il solo studio di funzione. Non allegare la "brutta copia". È vietato utilizzare appunti, materiale didattico, calcolatrici e comunicare con chicchessia. Tempo a disposizione: 90 minuti.

Esercizio 1. Risolvere la seguente disequazione $\frac{x^2-2x-3}{x-2} \geq 0$.

Soluzione:

$$[-1, 2) \cup [3, \infty)$$

Esercizio 2. Determinare l'insieme dei punti interni dell'insieme $X = [0, 1) \cup [10, +\infty)$

Soluzione:

$$(0, 1) \cup (10, +\infty)$$

Esercizio 3. Calcolare l'equazione della retta tangente il grafico della funzione $f(x) = e^{2-x}$ nel punto di coordinate $(2, f(2))$.

Soluzione.

$$y = -x + 1$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente limite $\lim_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{\ln(1-x)}{x^2}$ (specificando se per eccesso o per difetto):

Soluzione.

$$\lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{\ln(1-x)}{x^2} = 1^+$$

Esercizio 5. Dare la definizione di punto di discontinuità di tipo salto o di 1a specie.

Esercizio 6. Calcolare il seguente integrale definito $\int_1^2 (\frac{5}{x} - 2x^3)dx$.

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{5}{x} - 2x^3\right) dx &= 5\int \frac{1}{x}dx - 2\int x^3 dx = 5\ln x - \frac{1}{2}x^4 + c \\ \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - 2x^3\right) dx &= \left[5\ln x - \frac{1}{2}x^4\right]_1^2 = 5\ln 2 - \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 7. Si studi la seguente funzione, tracciandone un grafico qualitativo: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$.

La funzione è definita per $x \neq 2 : X = dom(f) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Essendo il dominio non simmetrico la funzione non può presentare simmetrie.

Essendo il dominio non compatto non può essere applicato il teorema di Weierstrass.

Il denominatore è sempre strettamente positivo quindi non si hanno punti di intersezione con l'asse delle ascisse. Il punto di intersezione con l'asse delle ordinate è semplicemente $\left(0; \frac{e^0}{0-2}\right) = \left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

La funzione è strettamente positiva per $x \in (2, +\infty)$, strettamente negativa per $x \in (-\infty, 2)$.

La funzione è rapporto di funzioni elementari derivabili 2 volte quindi essa stessa derivabile due volte e in particolare continua.

I limiti interessanti sono:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$ ($y = 0$ equazione dell'asintoto orizzontale sx)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (per le "velocità" degli infiniti; possibile esistenza di asintoto obliquo)

$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \pm\infty$ ($x = 2$ equazione dell'asintoto verticale sx/dx)

La funzione è perciò illimitata e non può presentare estremanti globali.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Longrightarrow \nexists$ asintoto obliquo

$f'(x) = e^x \frac{x-3}{(x-2)^2}$ con $x \neq 2$

Segno di f' e monotonia:

$f' > 0$ ssse $x - 3 > 0 \Longrightarrow f$ strettamente crescente su $[3, +\infty)$

$f' < 0$ per $x < 3, x \neq 2 \Longrightarrow f$ strettamente decrescente su $(-\infty, 2)$ e altrettanto su $(2, 3]$.

N.B. l'affermazione "f strettamente decrescente per $x < 3$" è falsa. Ed è un errore grave.

L'unico punto stazionario è $x = 3$ che risulta essere evidentemente punto di minimo locale forte.

$f''(x) = e^x \frac{x^2-6x+10}{(x-2)^3}$ con $x \neq 2$

segno di f'' e concavità:

N.B. il discriminante del polinomio $x^2 - 6x + 10$ è negativo, ovvero l'equazione $x^2 - 6x + 10 = 0$ non ammette soluzioni (reali) e $x^2 - 6x + 10 > 0$ è sempre verificata. Essere messi in crisi da questa situazione (come successo a molti studenti) è indice di crassa ignoranza degli elementi di base del calcolo algebrico.

$f'' > 0$ ssse $(x-2)^3 > 0$ ssse $x > 2 \Longrightarrow f$ strettamente convessa su $(2, +\infty)$
$f'' < 0$ ssse $(x-2)^3 < 0$ ssse $x < 2 \Longrightarrow f$ strettamente concava su $(-\infty, 2)$.

La funzione non è iniettiva, nè suriettiva. L'insieme delle immagini risulta:

$$im(f) = (-\infty, 0) \cup [e^3, +\infty)$$