Metodi Matematici 1 8cfu 13 giugno 2017

SOLUZIONI

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le soluzioni negli appositi spazi. La brutta copia non va consegnata.
È vietato utilizzare appunti o materiale didattico, calcolatrici e comunicare con chicchessi
Tempo a disposizione: 90 minuti.

Esercizio 1. Data la funzione f definita da $f(x) = x^4$, si determini la legge di $f(f(x))$.

Soluzione

$$\boxed{f(f(x)) = x^{16}}$$

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \ln(x-1)$ in corrispondenza del punto $x_0 = 2$.

Soluzione.

$$\boxed{y = x - 2}$$

Esercizio 3. Calcolare la controimmagine dell'insieme $(-1, +\infty)$ tramite la funzione $f(x) = \sqrt{4 - x^2} - 2$.

Soluzione

$$\boxed{f^{-1}\left((-1,+\infty)\right) = \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)}$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^{20}}{e^x - 1}$$

Soluzione.

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^{20}}{e^x - 1} = -\infty}$$

Esercizio 5.

(a) Dare la definizione di funzione crescente.

(b) Stabilire la monotonia della seguente funzione $f(x) = \ln(1-x^2)$.

Soluzione

$dom(f) = (-1, 1)$

f è derivabile sul proprio dominio con

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

il cui segno è strettamente negativo per $x > 0$, nullo per $x = 0$ e positivo per $x < 0$.

Dunque la funzione è strettamente crescente su (-1,0], strettamente decrescente su [0,1) e presenta un punto di massimo globale forte in $x = 0$. In generale f non è monotona.

Esercizio 6. Si studi (includendo gli eventuali asintoti obliqui) la seguente funzione $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2-x}$.

Soluzione.

$f(x) = \dfrac{x^2-3}{2-x}$

Si ha $dom(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

f non presenta simmetrie, non avendo dominio simmetrico.

Intersezioni assi:

$0 \in dom(f)$; $(0, f(0)) = (0; 1.5)$

$f(x) = 0$ ssse $x = \pm\sqrt{3}$

Segno:

$f(x) = \dfrac{x^2-3}{2-x} > 0$ ssse $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 2\right)$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$

No asintoti orizzontali. Funzione illimitata. No estremanti globali.

$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \mp\infty$

$x = 2$ asintoto verticale sia sx sia dx.

Asintoti obliqui:

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = -2$

$y = -x - 2$ asintoto obliquo sia sx sia dx.

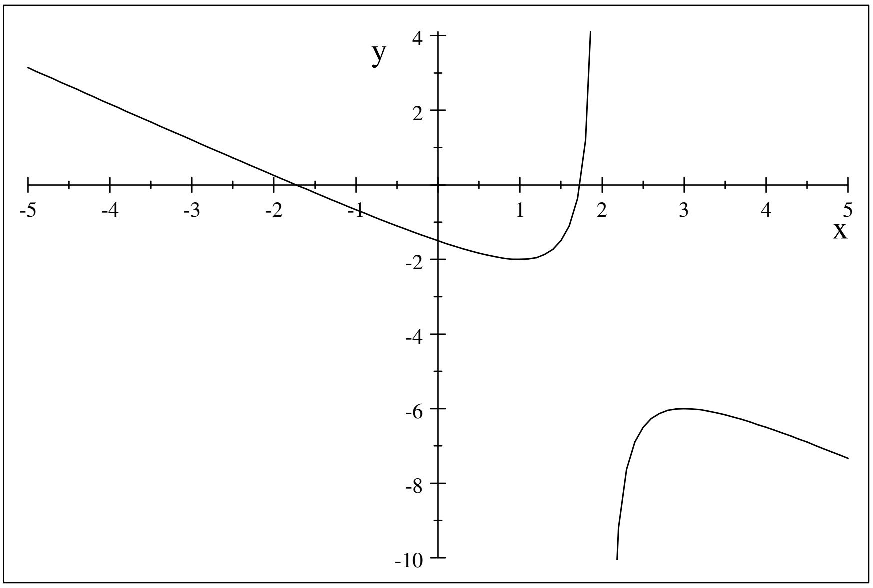
$f'(x) = \frac{-x^2+4x-3}{(2-x)^2}$ $x \in dom(f)$

$f'(x) > 0$ ssse $(1, 2) \cup (2, 3)$ che sono tratti di stretta crescenza della funzione. I rimanenti essendo tratti di decrescenza. Si noti che la funzione, in generale, non risulta monotona.

1 è punto di minimo locale forte (minimo $f(1) = -2$). 3 è punto di massimo locale forte (massimo $f(3) = -6$).

$f''(x) = \frac{2}{(2-x)^3}$

$\frac{2}{(2-x)^3} > 0$ ssse $x \in (-\infty, 2)$ che è un tratto di stretta convessità (vs il basso). Il tratto $(2, +\infty)$ risultando invece un tratto di stretta concavità. Non vi sono flessi. La funzione non è iniettiva, nè suriettiva. $\text{Im}(f) = (-\infty; -6) \cup (-2; +\infty)$.


y
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x