Metodi Matematici 1 8cfu   27 giugno 2017

SOLUZIONI

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le soluzioni negli appositi spazi. La brutta copia non va consegnata.
È vietato utilizzare appunti o materiale didattico, calcolatrici e comunicare con chicchessi
Tempo a disposizione: 90 minuti.

Esercizio 1. Data la funzione f definita da $f(x) = \ln(x) - 1$, si determini la legge della funzione inversa $f^{-1}(y)$ ed il suo dominio naturale.

Soluzione

$$\boxed{f^{-1}(y) = e^{y+1};\text{ con } y \in R}$$

Esercizio 2. Determinare i punti stazionari della seguente funzione $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 3$

Soluzione

$$\boxed{x = 0}$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale indefinito $\int 3e^{2x}dx$

Soluzione

$$\boxed{\tfrac{3}{2}e^{2x} + k}$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2^x - 1}{3 - x}$$

Soluzione.

$$\boxed{\lim_{x\to 3^+} \frac{2^x - 1}{3 - x} = -\infty}$$

Esercizio 5.

(a) Dato l'insieme $X \subseteq R$ dare la definizione di massimo di X.

(b) Stabilire se sia possibile applicare il teorema di esistenza degli zeri alla funzione $f : [-1; 1] \to R$ con $f(x) = 2^x + x$.

Soluzione

f è somma di due funzioni elementari definite su tutto R e strettamente crescenti oltre che, naturalmente, continue. Essendo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ la funzione passa quindi da valori negativi a valori positivi. E' possibile quindi applicare il teorema di esistenza degli zeri scegliendo opportunamente un intervallo con segni discordanti della funzione agli estremi dello stesso.

Esercizio 6. Si studi, arrivando a tracciarne il grafico, la seguente funzione $f(x) = \ln x^2 + x^2$ (non si cerchi con precisione il segno della funzione nè si ricerchino i punti di intersezione con l'asse delle ascisse).

Soluzione.

$f(x) = \ln x^2 + x^2$

$dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$f(-x) = f(x)$ f è pari. Condurremo l'analisi solo per $x > 0$ per poi estendere semplicemente le conclusioni al versante negativo.

Intersezioni assi:

$0 \notin dom(f) \Rightarrow$ no intersezioni asse delle ordinate

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

No asintoti orizzontali. Funzione illimitata. No estremanti globali.

$x = 0$ asintoto verticale dx.

Asintoti obliqui:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = +\infty$

no asintoti obliqui.

$f'(x) = 2x + \frac{2}{x} = 2\frac{x^2+1}{x}$ $\forall x \in dom(f)$.

Consegue che f è continua sul proprio dominio.

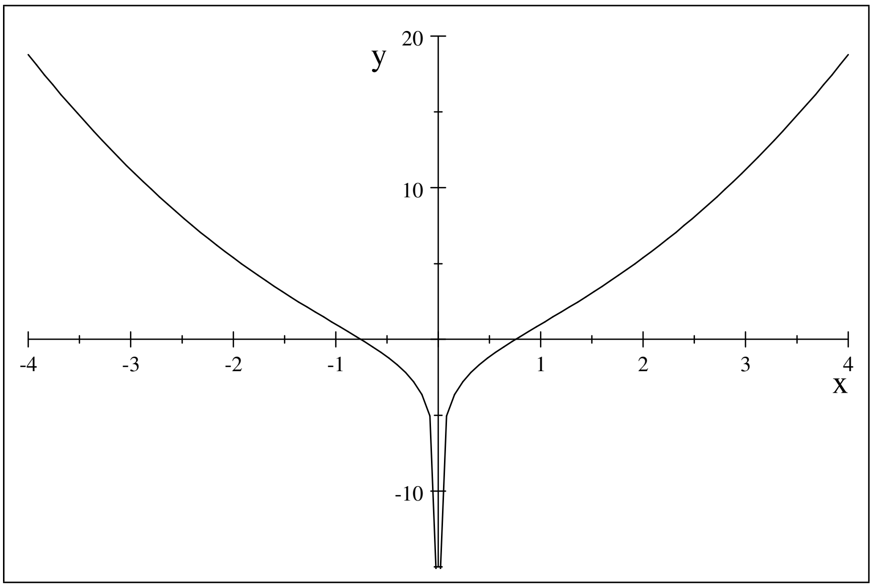
$f'(x) > 0$ $\forall x > 0$. Dunque f presenta un tratto di stretta crescenza su $(0, +\infty)$.

Visto che la funzione passa da valori negativi a valori positivi ed è continuta, per il teorema di esistenza degli zeri esiste un punto di intersezione con l'asse delle ascisse. Essendo $f(1) = 1 > 0$ tale punto di intersezione sarà compreso tra 0 ed 1.

$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = 2\frac{x^2-1}{x^2}$

$2\frac{x^2-1}{x^2} > 0$ ssse $x^2 - 1 > 0$ ssse $x > 1$ (si rammenti che stiamo limitandoci al semiasse positivo delle x). Su $(1, +\infty)$ f è strettamente convessa (vs il basso); su $(0, 1)$ f è strettamente concava. Il punto $x = 1$ è un punto di flesso.

Con queste informazioni e considerando la parità della funzione possiamo tracciarne un grafico qualitativo



Si noti che la funzione, in generale, non risulta monotona. La funzione non è iniettiva, è suriettiva.