Metodi Matematici 1 8cfu 11 luglio 2017

SOLUZIONI

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le soluzioni negli appositi spazi. La brutta copia non va consegnata.
È vietato utilizzare appunti o materiale didattico, calcolatrici e comunicare con chicchessi
Tempo a disposizione: 90 minuti.

Esercizio 1. Determinare la controimmagine di $Y = (-3, \infty)$ tramite $f(x) = x^2 - 9x + 17$.

Soluzione

$$\boxed{f^{-1}(Y) = (-\infty, 4) \cup (5, \infty)}$$

Esercizio 2. Studiare la monotonia della funzione definita da $f(x) = e^{2x-x^2}$.

Soluzione

$$\boxed{\begin{array}{ccc} f \text{ strettamente crescente} & \Leftrightarrow & x < 1 \\ \\ f \text{ strettamente decrescente} & \Leftrightarrow & x > 1 \end{array}}$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale definito $\int_1^8 \frac{x^2+7x}{5x^2} dx$

Soluzione

$$\boxed{\int_1^8 \frac{x^2+7x}{5x^2} dx = \frac{21}{5} \ln 2 + \frac{7}{5}}$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{3}{x}} + \frac{3}{4}$$

Soluzione.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{3}{x}} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}}$$

Esercizio 5. Dare la definizione di punto di massimo globale per una funzione reale di variabile reale.

Metodi Matematici 1 8cfu 11 luglio 2017

SOLUZIONI

Cognome **Nome** **Matricola**

Scrivere le soluzioni negli appositi spazi. La brutta copia non va consegnata.
È vietato utilizzare appunti o materiale didattico, calcolatrici e comunicare con chicchessi
Tempo a disposizione: 90 minuti.

Esercizio 1. Determinare la controimmagine di $Y = (-\infty, -3]$ tramite $f(x) = x^2 + 9x + 17$.

Soluzione

$$\boxed{f^{-1}(Y) = [-5, -4]}$$

Esercizio 2. Studiare la monotonia della funzione definita da $f(x) = e^{x^2 - x}$.

Soluzione

$$\boxed{\begin{array}{ccc} f \text{ strettamente crescente} & \Leftrightarrow & x > \frac{1}{2} \\ f \text{ strettamente decrescente} & \Leftrightarrow & x < \frac{1}{2} \end{array}}$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente integrale definito $\int\limits_1^8 \frac{7x - x^2}{5x^2} dx$

Soluzione

$$\boxed{\int\limits_1^8 \frac{7x - x^2}{5x^2} dx = \frac{21}{5} \ln 2 - \frac{7}{5}}$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{3}{x}} + \frac{3}{4}$$

Soluzione.

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{3}{x}} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}}$$

Esercizio 5. Dare la definizione di punto di minimo globale forte per una funzione reale di variabile reale.

Esercizio 6. Stabilire se sia possibile applicare il teorema di weierstrass alla funzione $f : [-1;1] \to R$ con $f(x) = e^{x^2}$. In caso affermativo determinare i punti citati nella tesi del teorema.
Soluzione

f è funzione composta di funzioni elementari quindi è continua sul suo dominio che coincide con tutto l'asse reale. In particolare lo sarà sul dominio indicato che risulta essere compatto. Perciò il teorema di Weierstrass è applicabile al caso esaminato. Essendo f una funzione derivabile si può utilizzare la derivata prima per individuare gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) = 2xe^{x^2} \qquad\qquad f' > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

dunque il punto di minimo globale è $x = 0$. Essendo unico sarà anche estremante forte. Ci sono invece due punti di massimo globale (debole per ovvie ragioni) e sono i punti $x = \pm 1$.

Esercizio 7. Si studi, arrivando a tracciarne il grafico, la seguente funzione $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$.

Soluzione (sintetica).

$dom(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

$f(-x) = f(x)$ f è pari. Condurremo l'analisi solo per $x > 0$ per poi estendere semplicemente le conclusioni al versante negativo.

Intersezioni assi:

$f(0) = -2 \Rightarrow (0, -2)$ punto di intersezione asse delle ordinate.

$f \neq 0 \forall x \Rightarrow$ no intersezioni con l'asse delle ascisse.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \infty$

Funzione illimitata. No estremanti globali.

$y = 0$ asintoto orizzontale dx e sx. Quindi non ci sono asintoti obliqui.

$x = \pm 1$ asintoti verticale dx e sx.

$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$ $\forall x \in dom(f)$.

Consegue che f è continua sul proprio dominio.

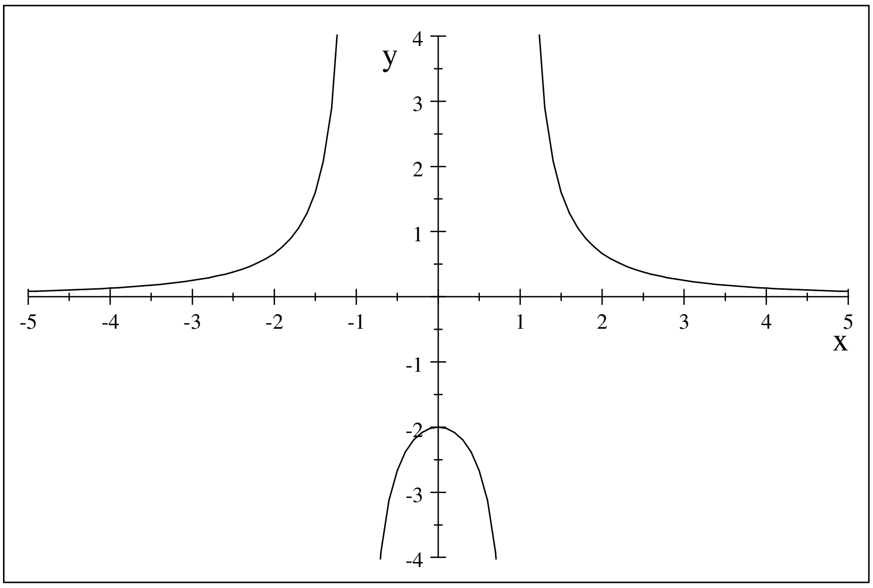
$f'(x) < 0$ $\forall x > 0$ con $x \in dom(f)$. Dunque f presenta due tratti di stretta decrescenza su $(0, 1)$ e su $(1, +\infty)$. f non risulta monotona!

$f''(x) = 4\frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}$ $\forall x \in dom(f)$.

$f'' > 0 \Leftrightarrow (x^2-1)^3 > 0$ ssse $x^2 - 1 > 0$ ssse $x > 1$ (si rammenti che stiamo limitandoci al semiasse positivo delle x). Su $(1, +\infty)$ f è strettamente convessa (vs il basso); su $(0, 1)$ f è strettamente concava.

Con queste informazioni e considerando la parità della funzione possiamo tracciarne un grafico qualitativo

Si noti che la funzione non è iniettiva, nè suriettiva. Si ha infine $im(f) = (-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$.



y
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x