Metodi Matematici 1 8cfu 9 febbraio 2018

SOLUZIONI

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le soluzioni negli appositi spazi. La brutta copia va consegnata.
È vietato utilizzare appunti o materiale didattico, calcolatrici e comunicare con chicchessi
Tempo a disposizione: 45 minuti.

Esercizio 1. Date le funzioni f e g definite rispettivamente da $f(x) = x^5$ e $g(x) = x^3 - 2$ si determini la legge di $g(f(x))$ (semplificando, ove possibile, la risposta).

Soluzione

$$\boxed{g(f(x)) = x^{15} - 2}$$

Esercizio 2. Determinare la controimmagine di $Y = [-2; 2)$ tramite $f(x) = x^2 - 6$.

Soluzione

$$\boxed{f^{-1}(Y) = \left(-2\sqrt{2}; -2\right] \cup \left[2; 2\sqrt{2}\right)}$$

Esercizio 3. Calcolare la primitiva della funzione $f(x) = e^{2x} - 3x^3$ passante per il punto $(0; 1)$.$N.B.$ NON basta la primitiva.

Soluzione

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}}$$

Esercizio 4. Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{e^{-3x}-4}$

Soluzione.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{e^{-3x}-4} = -\infty}$$

Esercizio 5. Calcolare la derivata prima della funzione $f(x) = e^{1-x^2}$

Soluzione.

$$\boxed{f'(x) = -2xe^{1-x^2}}$$

Esercizio 6. Enunciare il teorema di Wierstrass

Soluzione.

Metodi Matematici 1 8cfu 9 febbraio 2018

SOLUZIONI

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le soluzioni negli appositi spazi. La brutta copia va consegnata.
È vietato utilizzare appunti o materiale didattico, calcolatrici e comunicare con chicchessi
Tempo a disposizione: 45 minuti.

Esercizio 7.

Data la funzione $f(x) = (1 - e^x)x^6$ si consideri la funzione integrale:

$$F(x) = \int_1^x f(x)dx$$

Determinare:

1. dominio di F, ovvero per quali x esiste l'integrale definito;
2. utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale (non occorre quindi calcolare alcun integrale) individuare i tratti di monotonia di F ed i suoi eventuali estremanti.

Soluzione

1. f è una funzione continua per cui è integrabile secondo Riemann su un qualsiasi intervallo finito. Il dominio di F è perciò tutto R.
2. Secondo il teorema fondamentale del calcolo integrale se la funzione integranda è continua la funzione integrale risulta derivabile con derivata coincidente con la funzione integrale stessa. Quindi è sufficiente studiare il segno di f :

$$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & F \text{ str crescente} & x < 0 \\ f'(x) = 0 & & x = 0 \\ f'(x) < 0 & F \text{ str decrescente} & x > 0 \end{array}$$

Dunque $x = 0$ è un punto di massimo globale forte.

Esercizio 8. Studiare, tracciandone un grafico qualitativo, la funzione:

$$f(x) = \frac{e^x}{2+x}$$

Soluzione.

$f(x) = \frac{e^x}{2+x}$

$dom(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. No weierstrass.

No simmetrie.

Segno: $f > 0 \ \ \forall x > -2$; $f < 0 \ \ f < 0 \ \ \forall x < -2$.

Intersezione asse ordinate: $(0; 1/2)$. No intersezione asse ascisse.

$lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{2+x} = 0^-$ $\ y = 0$ equazione dell'asintoto orizzontale sx.

$lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2+x} = +\infty$

$lim_{x\to-2^{\mp}} = \mp\infty \quad x = -2$ equazione dell'asintoto verticale sx e dx.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{2+x}}{x} = +\infty \quad$ no asintoto obliquo

f illimitata. No estremanti globali.

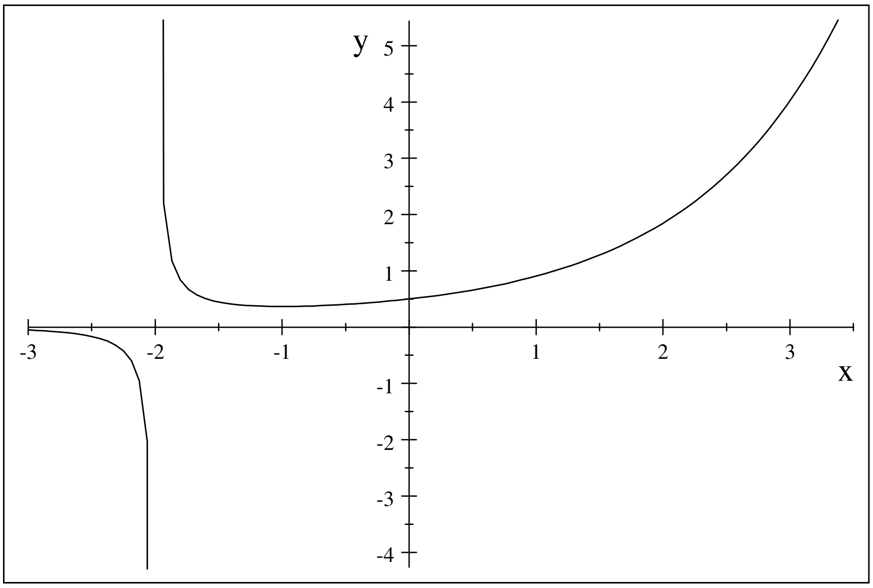
f è rapporto di funzioni elementari derivabili almeno infinite volte, quindi, derivabile sul proprio dominio almeno due volte.

$f'(x) = e^x\frac{x+1}{(x+2)^2} \quad f' > 0 \ ssse \ x > -1.$

f strettamente decrescente su $(-\infty; -2)$ e su $(-2; -1]$. Strettamente crescente su $[-1; +\infty)$. $x = -1$ punto di minimo locale forte.

$f''(x) = e^x\frac{x^2+2x+2}{(x+2)^3} \quad f'' > 0 \ ssse \ x > -2.$

f strettamente concava su $(-\infty; -2)$ e strettamente convessa su $(-2; +\infty)$; no flessi.



f non è monotona, nè invertibile, ne suriettiva. L'insieme delle immagini è $im(f) = (-\infty; 0) \cup [1/e; +\infty)$.