Metodi Matematici 1 8cfu 18 gennaio 2019

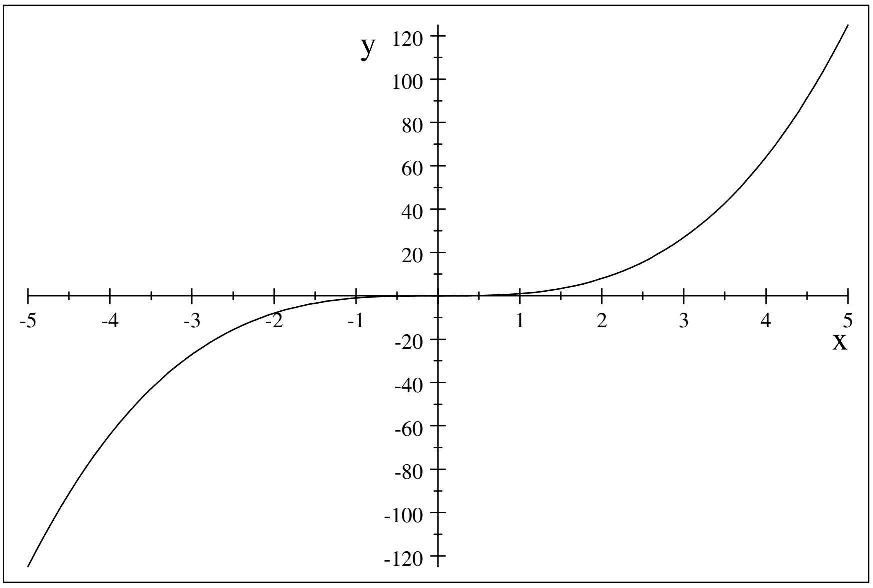
2a prova parziale

Cognome **Nome** **Matricola**

Scrivere le soluzioni negli appositi spazi. La brutta copia non va consegnata.
È vietato utilizzare appunti o materiale didattico, calcolatrici e comunicare con chicchessi
Tempo a disposizione: 90 minuti.

Domanda 1. Tracciare il grafico di una funzione che pur non rispettando tutte le ipotesi del teorema di Fermat ne soddisfa la tesi, precisando in modo chiaro perchè il grafico soddisfa la tesi e quale delle ipotesi del teorema non è soddisfatta.

Risposta:
Per esempio $f(x) = x^3$ in $x^* = 0$



f è definita su un dominio aperto, R, è derivabile e $x^* = 0$ **non** è punto di estremo. Però in $x^* = 0$ si ha $f'(0) = 0$ che è la tesi del teorema. L'ipotesi non soddisfatta è l'essere punto di estremo per il punto in questione x^*.

Domanda 2. Dare la definizione di punto di flesso per una funzione reale di variabile reale.

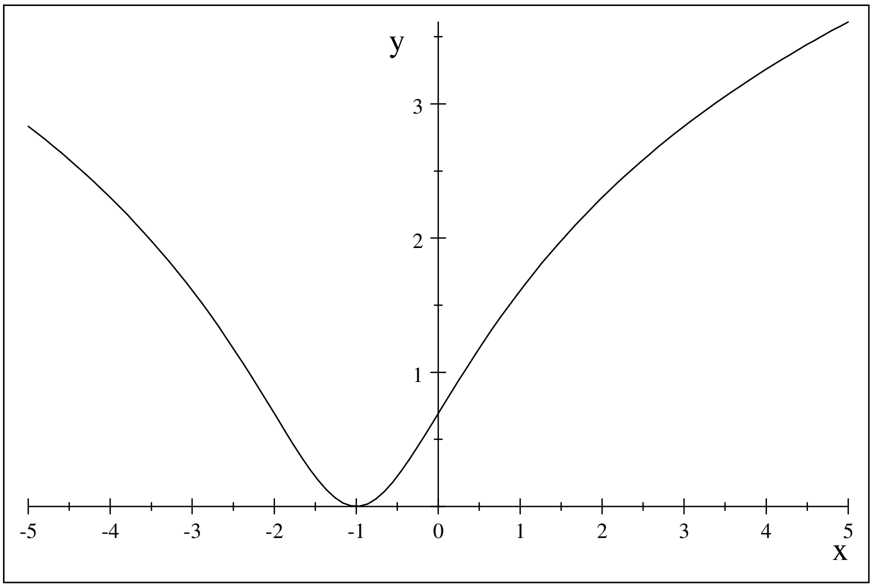
Risposta:

Domanda 3. Data la funzione $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ determinare:

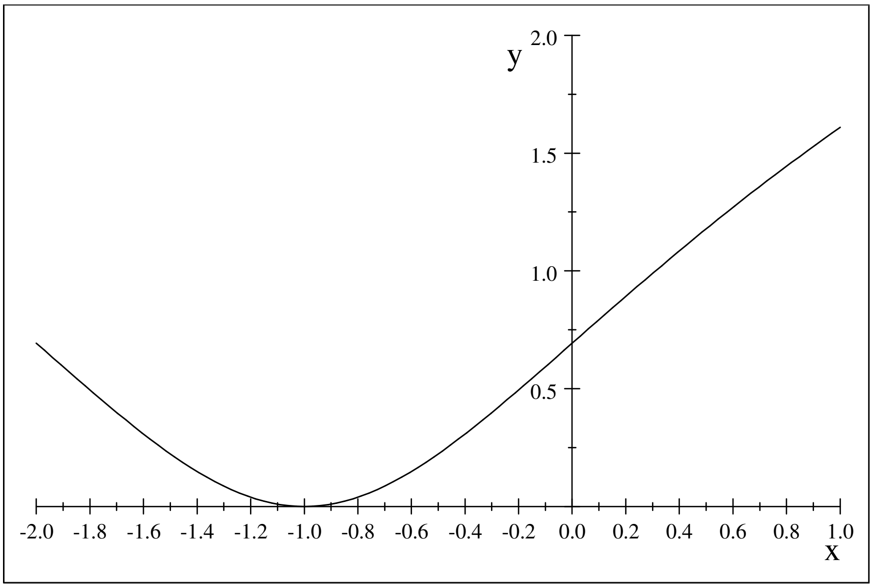
1. eventuali punti stazionari;
2. eventuali punti di estremo e relative immagini, specificandone se max o min, locali o globali;
3. eventuali estremanti specificandone la natura della restrizione di f all'intervallo $[-2; 1]$.

Risposta:

$f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$
$x^2 + 2x + 2 > 0$, Solution is: $\mathbb{R}$
$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$
$f' = 0$ ssse $x = -1$ unico pt stazionario
$f(-1) = 0$
$f' > 0$ ssse $x > -1 \;\Rightarrow x = -1$ è pt di minimo globale forte con minimo per la funzione pari a 0.



f con dominio R



f con dominio $[-2; 1]$

Se ci si restringe al dominio $[-2; 1]$ $x = -2$ risulta pt di massimo locale forte, $x = -1$ rimane pt di minimo globale forte e $x = 1$ risulta pt di massimo globale forte con massimo globale pari a $\ln 5$.

Domanda 4. Data la funzione

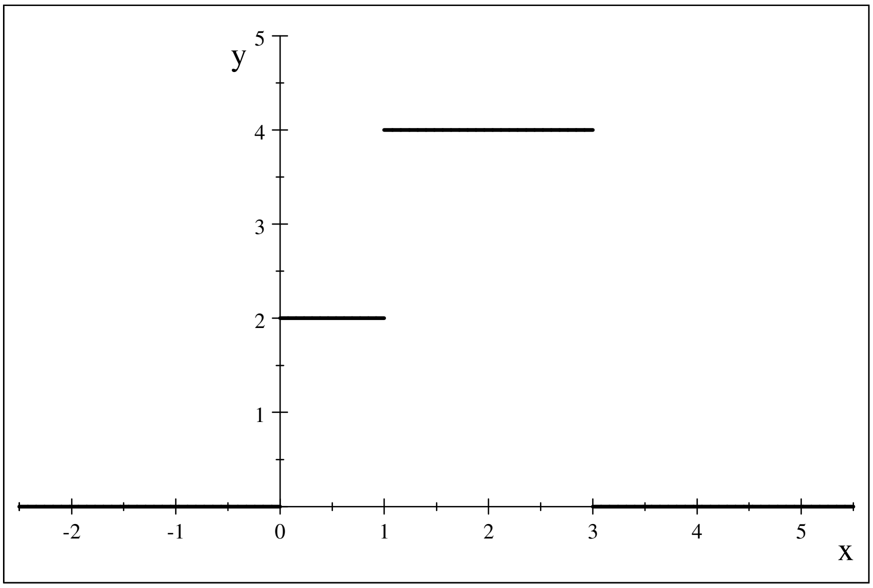
$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 & 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

studiare, tracciandone un grafico qualitativo, la seguente funzione:

$$\boxed{F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt \quad \text{sul dominio } X = [-2; 5]}$$

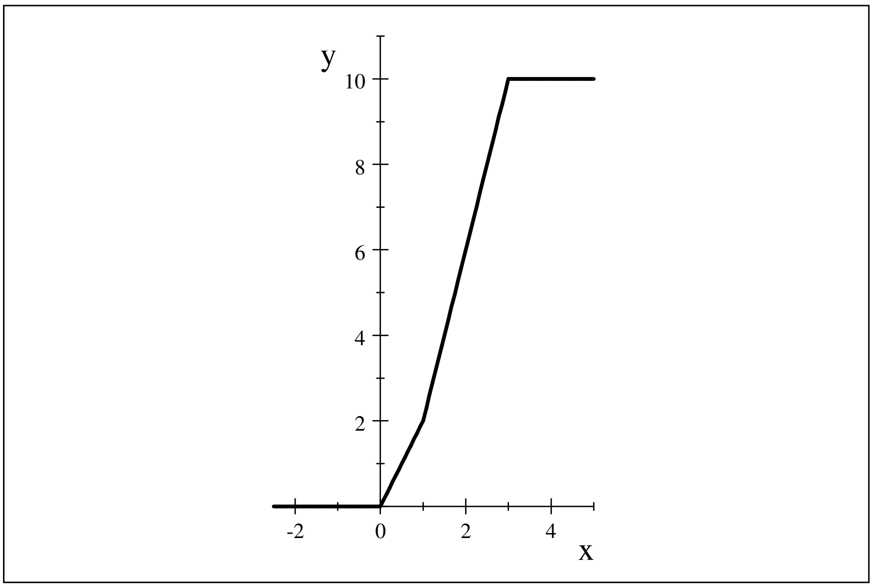
Risposta:

La funzione integranda f è una semplice funzione costante a tratti.



Ricostruiamo la funzione integrale F sfruttando le varie proprietà del calcolo integrale.

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-2}^{x} 0dt = 0 & \forall x \leq 0 \\ \int_{-2}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 2dt = 2x & \forall 0 < x \leq 1 \\ \int_{-2}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} 2dt + \int_{1}^{x} 4dt = 0 + 2 + 4x - 4 = -2 + 4x & \forall 1 < x \leq 3 \\ \int_{-2}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} 2dt + \int_{1}^{3} 4dt + \int_{3}^{x} 0dt = 0 + 2 + 8 + 0 = 10 & \forall x > 3 \end{cases}$$


y
10
8
6
4
2
-2
0
2
4
x

Metodi Matematici 1 8cfu 18 gennaio 2019

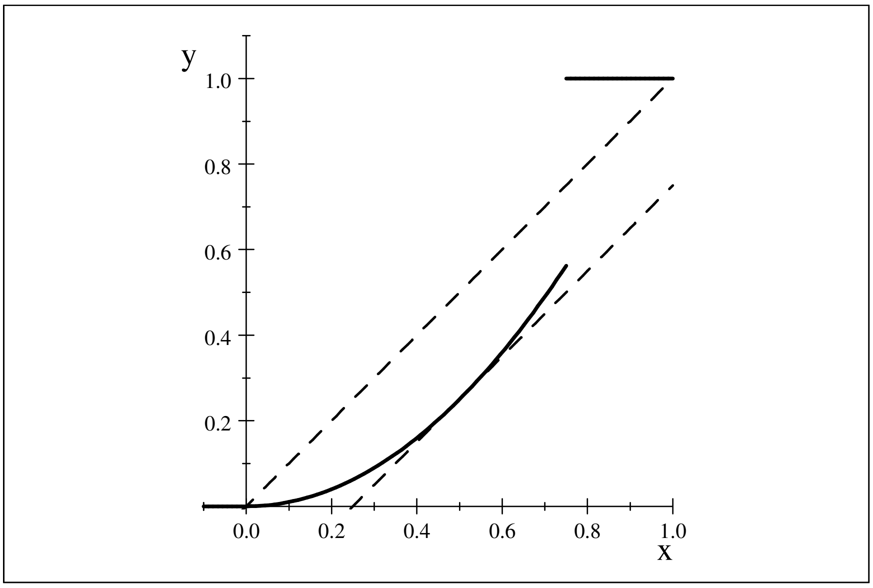
2a prova parziale

Cognome **Nome** **Matricola**

Scrivere le soluzioni negli appositi spazi. La brutta copia non va consegnata.
È vietato utilizzare appunti o materiale didattico, calcolatrici e comunicare con chicchessi
Tempo a disposizione: 90 minuti.

Domanda 1. Tracciare il grafico di una funzione che pur non rispettando tutte le ipotesi del teorema di Lagrange ne soddisfa la tesi, precisando in modo chiaro perchè il grafico soddisfa la tesi e quale delle ipotesi del teorema non è soddisfatta.

Risposta:



La funzione non è continua su $[0;1]$ né derivabile eppure esiste un punto $0 < x < 1$, esattamente $x = 0.5$, in cui la pendenza della retta tangente al grafico della funzione è pari a quello del segmento che unisce i due punti del piano $(0;0)$ e $(1;1)$.

Domanda 2. Dare la definizione di primitiva di una funzione reale di variabile reale spiegando, in caso di esistenza, se questa sia unica oppure no.

Risposta:

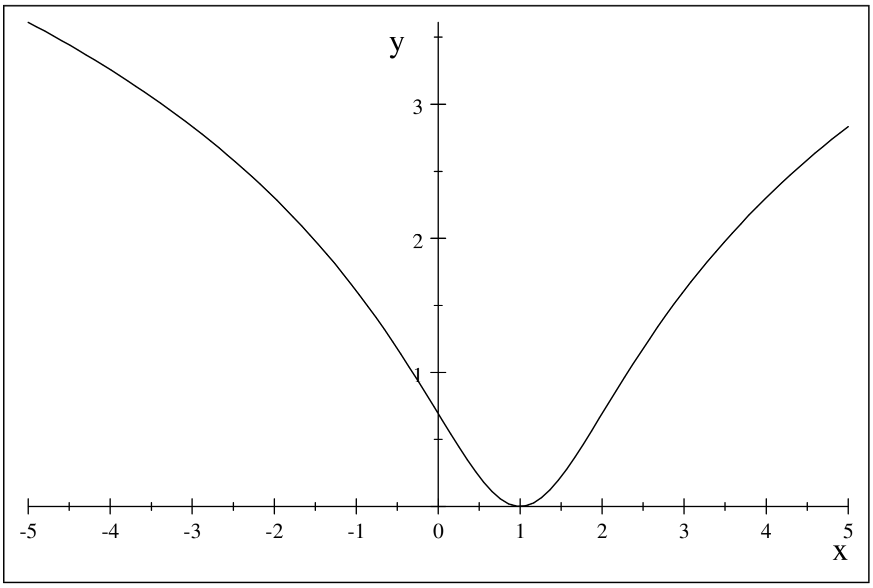
Domanda 3. Data la funzione $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ determinare:

1. eventuali punti stazionari;
2. eventuali punti di estremo e relative immagini, specificandone se max o min, locali o globali;

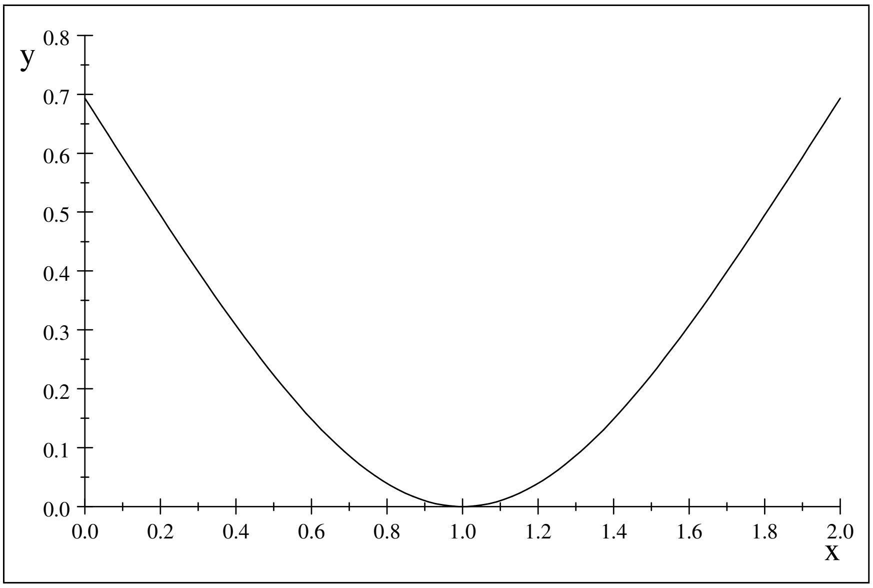
3. eventuali estremanti specificandone la natura della restrizione di f all'intervallo $[0;2]$.

Risposta:

$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$
$x^2 - 2x + 2 > 0$, Solution is: $\mathbb{R}$
$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$
$f' = 0$ ssse $x = 1$ unico pt stazionario
$f(1) = 0$
$f' > 0$ ssse $x > 1$ $\Rightarrow x = 1$ è pt di minimo globale forte con minimo per la funzione pari a 0.



f con dominio R



f con dominio $[0;2]$

Se ci si restringe al dominio $[0;2]$ $x = 0$ e $x = 2$ risultano entrambi pt di massimo globale con massimo per la funzione pari a $\ln 2$; $x = 1$ rimane pt di minimo globale forte.

Domanda 4. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4 & 0 \le x \le 2 \\ 2 & 2 < x \le 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

studiare, tracciandone un grafico qualitativo, la seguente funzione:

$$\boxed{F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt \quad \text{sul dominio } X = [-1;6]}$$

Risposta:

Come per la versione precedente, si ottiene:

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{x} 0dt = 0 & \forall x \le 0 \\ \int_{-1}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 4dt = 4x & \forall 0 < x \le 2 \\ \int_{-1}^{0} 0dt + \int_{0}^{2} 4dt + \int_{2}^{x} 2dt = 0 + 8 + 2x - 4 = 4 + 2x & \forall 2 < x \le 3 \\ \int_{-1}^{0} 0dt + \int_{0}^{2} 4dt + \int_{2}^{3} 2dt + \int_{3}^{x} 0dt = 0 + 8 + 2 + 0 = 10 & \forall x > 3 \end{cases}$$