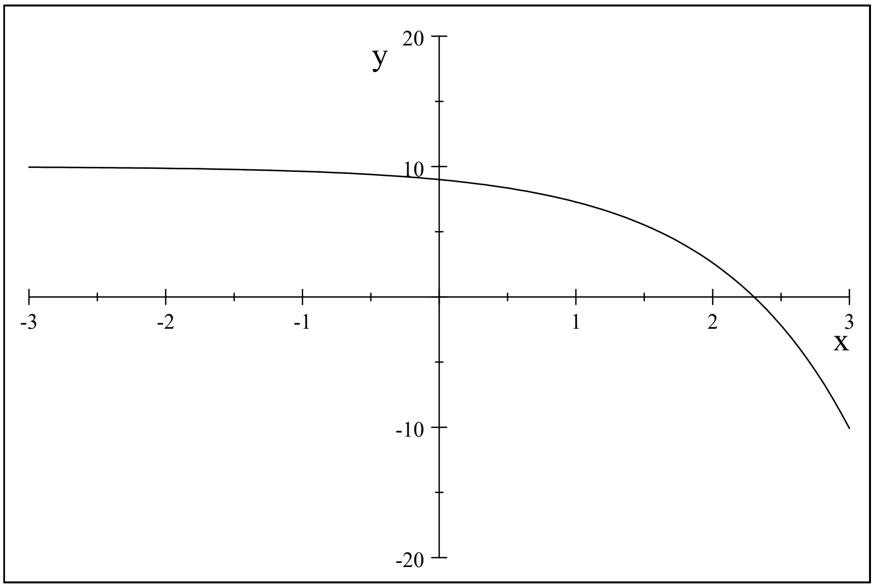
# Metodi Matematici 1 8cfu — 14 febbraio 2020

**SOLUZIONI**

| **Cognome** | **Nome** | **Matricola** |
|---|---|---|

**Scrivere il risultato secco relativo alle prime 6 domande negli appositi spazi.**
**Scrivere le risposte commentate alle domande 7 e 8 in un foglio protocollo.**
**La brutta copia va consegnata.** **TEMPO a disposizione: 90 MINUTI.**

**Domanda 1.** Tracciare il grafico di una funzione iniettiva e superiormente limitata.
**Risposta:** per esempio




**Domanda 2.** Si dia la definizione di asintoto verticale destro.
**Risposta:**
Sia $f : X \to R$ con $X \subseteq R$. Si dice che la retta di equazione $x = \overline{x}$ è asintoto verticale destro se $\lim_{x\to\overline{x}^+} f(x) = +\infty$ (o $-\infty$). Ovviamente, la scrittura di limite implica che $\overline{x}$ sia punto di accumulazione (da destra) per $X$.

**Domanda 3.** Determinare la controimmagine di $Y = [3, +\infty)$ tramite la funzione $f(x) = \frac{4-3x}{x+5}$.
**Risposta:** Da $\frac{4-3x}{x+5} \geq 3$ portando tutto a primo membro e facendo denominatore comune si ottiene $-\frac{6x+11}{x+5} \geq 0$. Il semplice studio del segno di numeratore e denominatore, oltre all'applicazione della classica regola dei segni, conduce a:

$$\boxed{f^{-1}(Y) = \left(-5, -\frac{11}{6}\right]}$$

**Domanda 4.** Calcolare il seguente limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^6-2e^x}{1-5x^6}$.

**Risposta:** Ricordando che $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, il limite può essere semplificato trascurando, sia a numeratore sia a denominatore, le quantità limitate (in generale, gli infiniti di ordine inferiore). Si ottiene $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^6}{-5x^6}$ da cui il risultato:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^6-2e^x}{1-5x^6} = -\frac{3}{5}}$$

**Domanda 5.** Determinare i punti che soddisfano la tesi del teorema di Lagrange della funzione $f(x) = \sqrt{x-2}$ sull'intervallo $[2; 6]$.

**Risposta.** La funzione, composta di funzioni elementari, è definita e continua su $[2, +\infty)$ ed ivi derivabile tranne nel punto $x = 2$. Quindi, nell'intervallo considerato sono verificate le condizioni presenti nella tesi del teorema di Lagrange. Esiste perciò almeno un punto $c \in (2; 6)$ tale che

$$\boxed{\frac{\sqrt{6-2}-\sqrt{2-2}}{6-2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}}$$

In questo caso l'unica soluzione è $x = 3$.

**Domanda 6.** Si determini il seguente integrale indefinito $\int \frac{2x-5x^3}{3x^2} dx$

$$\boxed{\int \frac{2x-5x^3}{3x^2} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{x} dx - \frac{5}{3} \int x dx = \frac{2}{3} \ln |x| - \frac{5}{6} x^2 + c}$$

**Esercizio 7.** Determinare i tratti di stretta crescenza e decrescenza di $f(x) = \frac{3x^2}{5-2x}$.

**Soluzione -**

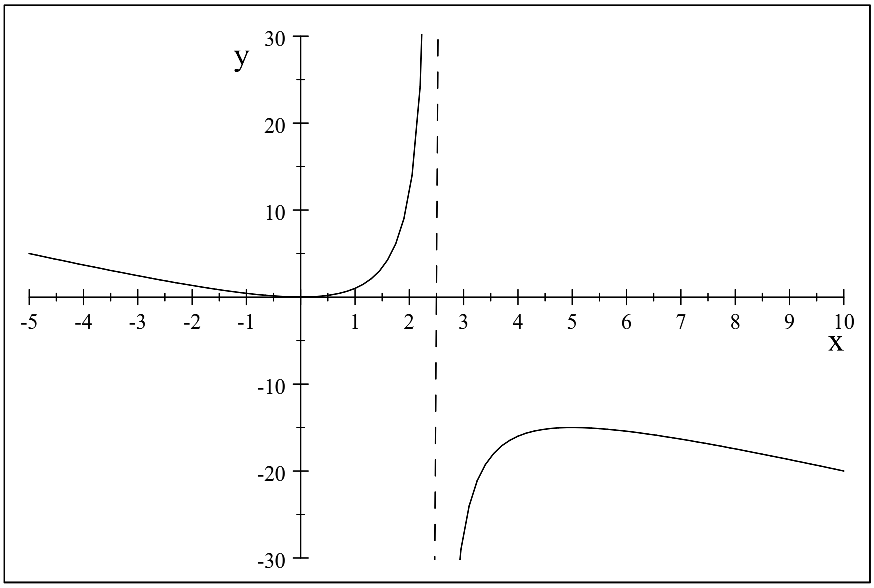
La funzione è definita $\forall x \neq \frac{5}{2}$. Attenzione: questo si rivelerà importante nelle conclusioni. Peraltro trattasi di funzione derivabile quindi si può procedere subito al calcolo della derivata prima il cui segno fornirà la risposta al quesito.

$$f'(x) = 6x \frac{5-x}{(2x-5)^2} \qquad x \neq \frac{5}{2}$$

Il denominatore è sempre strettamente positivo quindi il segno di $f'$ coinciderà col segno di $6x \cdot (5-x)$. Lo studio del segno di questa espressione algebrica unitamente al fatto che la funzione **non è definita** per $x = \frac{5}{2}$ e $\lim_{x\to\frac{5}{2}^\pm} f(x) = \pm\infty$, conduce alla conclusione che

$$\begin{aligned} f' &> 0 \text{ ssse } x \in \left(0, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, 5\right) \text{ che sono 2 distinti intervalli di stretta crescenza} \\ f' &< 0 \text{ ssse } x \in (-\infty, 0) \cup (5, \infty) \text{ che sono 2 distinti invervalli di stretta decrescenza.} \end{aligned}$$

N.B. - Dimenticare il fatto che la funzione non è definita in $x = \frac{5}{2}$ e non calcolare i limiti $\lim_{x\to\frac{5}{2}^\pm} f(x)$ può condurre all'errore (grave) di considerare l'insieme $\left(0, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, 5\right)$ o addirittura l'intervallo $(0; 5)$ come insiemi di stretta crescenza! In questo caso non è così. Come chiaramente illustrato dal grafico di $f$ (non richiesto e qui fornito solo per maggior chiarezza):




**Esercizio 8.** Date la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e la funzione integrale:

$$\boxed{F(x) = \int_0^x f(t)dt \;\; \text{sul dominio } X = [-1; 2]}$$

studiare la funzione $F$ tracciandone un grafico qualitativo.

**Soluzione -**

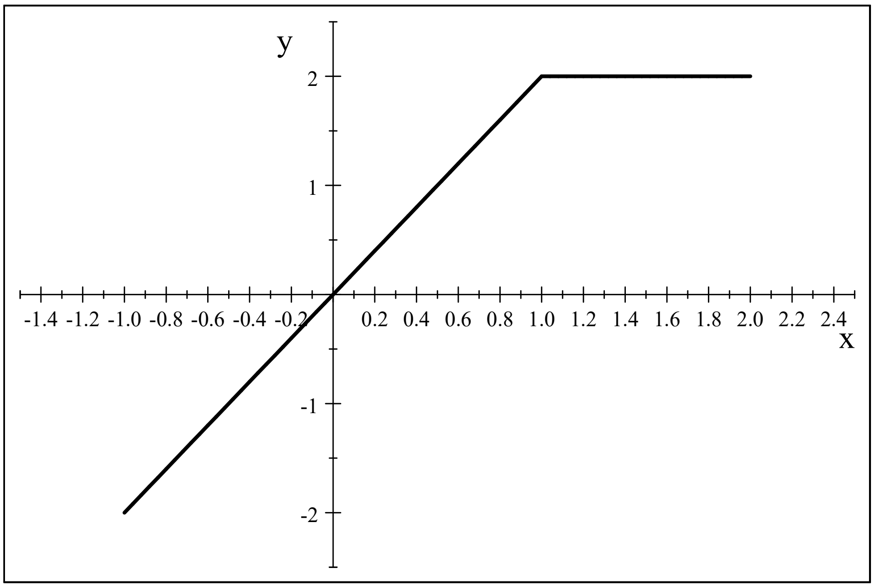
Dal momento che la funzione integrale è da studiare sull'intervallo $[-1; 2]$ e che la funzione integrale, su questo intervallo, cambia legge nel punto 1, occorre scomporre l'integrale che definisce la funzione in 2 sottointervalli. Sul primo, $(-1; 1)$, la funzione integranda è pari a 2 ed è continua. Quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $F$ è derivabile con derivata pari a 2. Sull'intervallo in questione sarà dunque $F(x) = 2x + q$ con $q \in R$. Si può peraltro facilmente notare che $F(0) = 0$ per cui dovrà essere $q = 0$.

Serve qui ricordare che l'area compresa tra il grafico di una funzione e l'asse delle ascisse non cambia se si include o meno un estremo di integrazione visto che l'area corrispondente è pari a 0. Perciò i punti $\pm 1$ possono essere ricompresi nell'intervallo.

L'area nel tratto $[1; 2]$ è pari a zero per cui $F$, rispetto al valore che raggiunge in 1, $F(1) = 2$, non cambia quando $x \in (1; 2]$.

Ne risulta:

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 2dt = 2x & \forall -1 \le x \le 1 \\ \int_0^1 2dt + \int_1^2 0dt = 2 + 0 = 2 & \forall\ 1 < x \le 2 \end{cases}$$


y
2
1
-1
-2
-1.4 -1.2 -1.0 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2 1.4 1.6 1.8 2.0 2.2 2.4
x

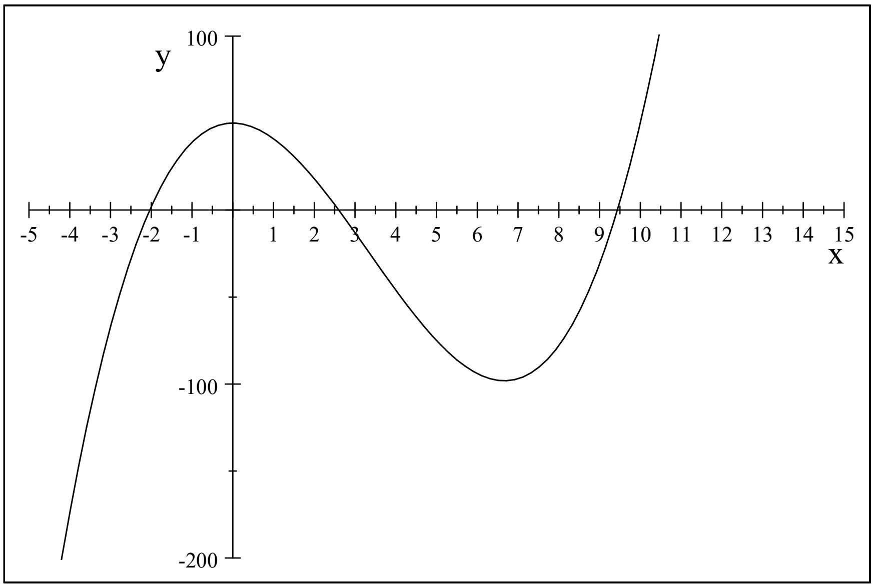
# Metodi Matematici 1 8cfu — 14 febbraio 2020

**SOLUZIONI**

**Cognome** **Nome** **Matricola**

**Scrivere il risultato secco relativo alle prime 6 domande negli appositi spazi.**
**Scrivere le risposte argomentate alle domande 7 e 8 in un foglio protocollo.**
**La brutta copia va consegnata.** **TEMPO a disposizione: 90 MINUTI.**

**Domanda 1.** Tracciare il grafico di una funzione con esattamente 1 punto di massimo **locale ma non globale**.
**Risposta:**




**Domanda 2.** Si enunci il teorema noto come test di convessità.
**Risposta:**
Sia $f : I \to R$ una funzione derivabile 2 volte sull'intervallo di definizione. Allora vale:
$f$ convessa su $I$ se e solo se $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in I$.

**Domanda 3.** Determinare l'inversa della funzione $f(x) = (5x-3)^3$.
**Risposta:**

$$dom(f^{-1}) = R \qquad f^{-1}(y) = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{y}$$

**Domanda 4.** Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-2e^x}{4\ln x - 5x^6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2e^x}{-5x^6} = +\infty$$

**Domanda 5.** Data la funzione $f(x) = xe^{1-2x}$ determinare il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f$ in corrispondenza di $x = \frac{1}{2}$.

**Risposta.**

$$\boxed{f'(x) = e^{1-2x}(1-2x) \qquad f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0}$$

**Domanda 6.** Si determini il seguente integrale definito $\int_1^2 \frac{3x-x^2}{2x}dx$ :

$$\boxed{\int_1^2 \frac{3x-x^2}{2x}dx = \left[\frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 0.75}$$

**Esercizio 7.**

Determinare i tratti di stretta crescenza e decrescenza di $f(x) = \frac{4-5x}{3x^2}$.

**Soluzione -**

$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{5x-8}{x^3}$

$\frac{5x-8}{x^3} > 0$ ssse $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{5}, \infty\right)$ che sono 2 distinti tratti di stretta crescenza.

$\frac{5x-8}{x^3} < 0$ ssse $x \in \left(0, \frac{8}{5}\right)$ che è un tratto di stretta decrescenza.

**Esercizio 8.** Date la funzione

$$f(t) = \begin{cases} -3 & -2 < t < 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e la funzione integrale:

$$\boxed{F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt \;\; \text{sul dominio } X = [-1; 5]}$$

studiare la funzione $F$ tracciandone un grafico qualitativo.

**Soluzione -**

$$F(x) = \begin{cases} -3x - 3 & \forall -1 \le x \le 4 \\ -15 & \forall\, 4 < x \le 5 \end{cases}$$