Metodi Matematici 1 8cfu — 17 febbraio 2016

SOLUZIONI

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le soluzioni negli appositi spazi. La brutta copia non va consegnata.
È vietato utilizzare appunti o materiale didattico, calcolatrici e comunicare con chicchessia.
Tempo a disposizione: 90 minuti.

Esercizio 1. Data $f(x) = 4x^2$ determinare la primitiva di f che passa per il punto di coordinate $(x, f(x)) = (1 \;\;, \;\; 1)$

$$\boxed{\int f(x)dx = \frac{4}{3}x^2 + c \qquad \textit{con } c = -\frac{1}{3}}$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x - 1}{2 + 4^x}$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x - 1}{2 + 4^x} = -\frac{1}{2}}$$

Esercizio 3. Calcolare la controimmagine di $Y = (-\infty, 1]$ tramite $f(x) = e^{x+3}$.

$$\boxed{f^{-1}((-\infty, 1]) = (-\infty, -3]}$$

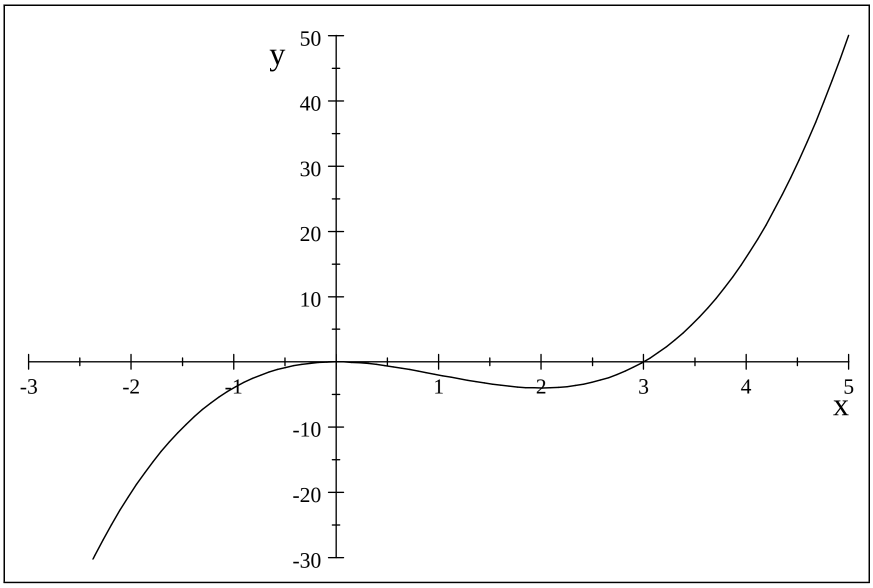
Esercizio 4. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \ln(1 + 2x)$ in corrispondenza del punto $x_0 = 0$.

$$\boxed{y = 2x}$$

Esercizio 5. **(a)** Dare la definizione di funzione concava.
(b) Data la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$

1. determinare gli eventuali tratti in cui f risulta essere strettamente decrescente;
2. nell'ipotesi di considerare la restrizione di f al dominio $[1, +\infty)$ determinare eventuali estremanti, specificandone la natura (massimi, minimi, locali, globali, forti deboli).

1. f è definita e derivabile su tutto R. $f'(x) = 3x^2 - 6x$ $f'(x) = 0$ ssse $x = 0$ $x = 2$. $f'(x) < 0$ ssse $0 < x < 2$ per cui il solo tratto di stretta decrescenza di f risulta essere $[0, 2]$.
2. Dato il segno di f', nella restrizione al dominio $[1, +\infty)$ vi è un punto di massimo locale forte (non esistono punti di massimo globale) in $x = 1$ e un punto di minimo globale forte in $x = 2$.



Esercizio 6. Si studi la seguente funzione, tracciandone un grafico qualitativo:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^3}.$$

Il dominio risulta $dom(f)$ $x \neq 0$.

$f(-x) = \frac{2x+1}{x^3} \neq f(x)$ no simmetrie.

Segno -
Numeratore strettamente positivo ssse $x > \frac{1}{2}$, nullo per $x = \frac{1}{2}$, strettamente negativo altrove.
Denominatore strettamente positivo ssse $x > 0$, strettamente negativo per $x < 0$.
Per le regole dei segni si ha:
$f(x) > 0$ ssse $x < 0$ oppure $x > \frac{1}{2}$;
$f(x) = 0$ ssse $x = \frac{1}{2}$ da cui si ottiene l'unico punto di intersezione con l'asse delle ascisse $(1/2, 0)$;
$f(x) < 0$ ssse $0 < x < \frac{1}{2}$.

f è rapporto di funzioni elementari derivabili quindi a sua volta derivabile e perciò continua. Gli unici limiti interessanti sono quelli agli estremi del dominio.

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x-1}{x^3} = 0^+ \qquad y = 0$ asintoto orizzontale sinistro.
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{x^3} = 0^+ \qquad y = 0$ asintoto orizzontale destro.
Limiti giustificati dall'ordine di infinito ("velocità" di tendenza all'infinito) di numeratore e denominatore.

$\lim_{x\to 0^\pm} \dfrac{2x-1}{x^3} = \mp\infty \qquad x = 0$ asintoto verticale sinistro e destro.
Limiti che sono casi particolari del teorema dell'algebra dei limiti.

La funzione è illimitata sia inferiormente sia superiormente. Non ammetterà dunque estremanti globali.

$f'(x) = \frac{3-4x}{x^4}$ $\forall x \neq 0$.

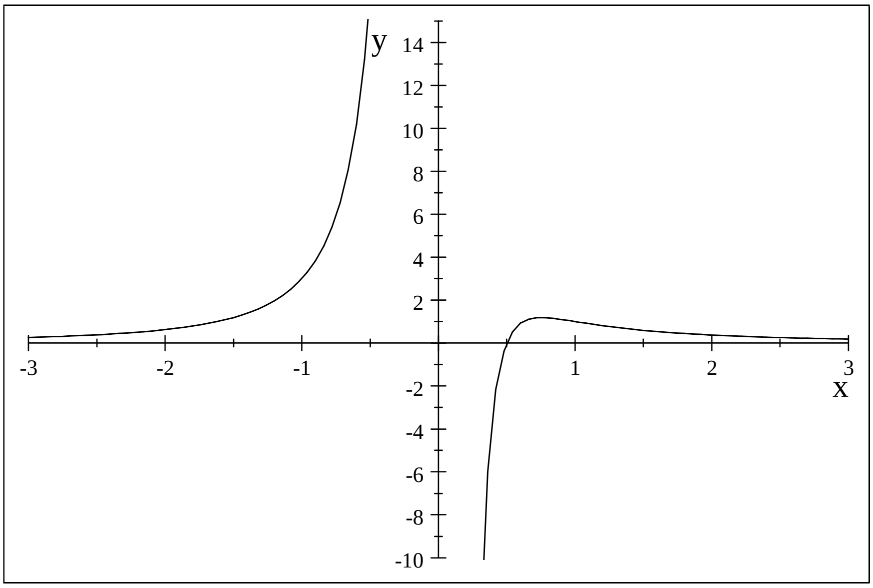
$f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3/4)$; f risulta localmente strettamente crescente sull'intervallo $(-\infty, 0)$ e sull'intervallo $(0, 3/4)$; n.b. la funzione NON è strettamente crescente su $(-\infty, 0) \cup (0, 3/4)$, lo è solo, come specificato, sui tratti singolarmente considerati;
$f'(x) < 0$ per $x \in (3/4, +\infty)$ intervallo su cui la funzione risulta essere strettamente decrescente;
$f'(x) = 0$ per $x = \frac{3}{4}$; punto stazionario in cui (visto i segni di f' appena analizzati) f ha un pt di massimo locale forte.
f non risulta essere monotona nè iniettiva.

$f''(x) = 12\frac{x-1}{x^5}$ $\forall x \neq 0$.

$f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$; f risulta localmente strettamente convessa sull'intervallo $(-\infty, 0)$ e sull'intervallo $(1, +\infty)$;

$f''(x) < 0$ per $x \in (0, 1)$ intervallo su cui la funzione risulta essere strettamente concava;

$f''(x) = 0$ per $x = 1$; punto di flesso.



f risulta essere suriettiva: $im(f) = R$.