Metodi Matematici 1 8cfu 23 gennaio 2015

Equivalente con Metodi Quantitativi 1

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le risposte negli appositi spazi, giustificando le risposte. La brutta copia non va consegnata. E' vietato utilizzare materiale didattico, calcolatrici e comunicare in qualsiasi modo con altre persone. Tempo a disposizione: 90 minuti.

1 - Risolvere la seguente disequazione: $\sqrt{x+2} - x < 0$

Soluzione:

L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo per cui il campo di esistenza è dato da $x + 2 \geq 0$ ovvero $x \geq -2$.

Possiamo così riscrivere la disequazione: $\sqrt{x+2} < x$. Le soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \\ x + 2 < x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases}$$

$$SOL : x > 2$$

2 - Data $f : (0, +\infty) \to R \;\; f(x) = 1 - \ln x$ determinare se f sia invertibile e in caso affermativo determinare la funzione l'espressione analitica dell'inversa f^{-1}.

Soluzione:

f è invertibile dato che $f'(x) = -\frac{1}{x} < 0 \;\; \forall x > 0$ che ne assicura la monotonia stretta da cui discende l'invertibilità. Scrivendo $y = 1 - \ln x$ si ottiene la seguente legge per f^{-1}

$$f' : R \to R \;\text{ con } f'(y) = e^{1-y}$$

3 - Calcolare $\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{4x^{10}-x}$

Soluzione:

Il denominatore è equivalente a $2x$. A denominatore si può trascurare $4x^{10}$ essendo un infinitesimo di ordine superiore a $-x$ (ovvero una quantità che tende a 0 più velocemente di $-x$). Il limite diventa

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

Alternativa: le ipotesi del teorema di de l'Hopital sono verificate.

4 - Enunciare il teorema di Weierstrass. Stabilire se la funzione $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$ sul suo dominio naturale rispetta le ipotesi di detto teorema. Determinarne i punti di estremo specificandone la natura.

Soluzione:

La funzione è definita per $0 \leq x \leq 6$ affinchè l'argomento della radice sia non negativo. La funzione è continua essendo composta di funzioni continure. Le ipotesi del teorema di Weierstrass sono verificate. La funzione risulta essere non negativa e si annulla nei due punti $x = 0$ e $x = 6$ che risultano essere perciò i due punti di minimo globale debole. Riguardo ai punti di massimo globale possiamo utilizzare la derivabilità della funzione. f è derivabile in tutti i punti interni al dominio con derivata prima

$$f'(x) = \frac{6-2x}{2\sqrt{6x-x^2}}$$

Il segno di f' risulta

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x < 3$$

per cui si evince che f è strettamente crescente sull'intervallo $[0, 3]$, strettamente decrescente sull'intervallo $[3, 6]$ ed il punto $x = 3$ è punto di massimo globale forte.

5 - Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Soluzione:

L'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo, il denominatore deve essere diverso da 0.

$dom(f) = (0, 1) \cup (1 + \infty)$

Il dominio è non simmetrico rispetto all'origine quindi non ha senso indagare se la funzione presenti simmetrie.

f non presenta simmetrie.

La funzione è derivabile almeno due volte essendo composizione e somma di funzioni derivabili. In particolare f è continua.

Non essendo l'origine inclusa nel dominio non esiste intersezione con l'asse delle ordinate. Non vi sono neppure punti di intersezione con l'asse delle ascisse dal momento che x deve essere diverso da 0.

Il numeratore è sempre positivo sul dominio della funzione. Il denominatore è positivo ssse $x > 1$. Per cui f è negativa per $0 < x < 1$ e positiva altrove.

Limiti:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} &= 0^- \\
\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln x} &= -\infty \\
\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln x} &= +\infty \\
\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} &= +\infty
\end{aligned}$$

L'ultimo limite è l'unica forma indeterminata e si risolve sfruttando le gerarchie degli infiniti.

La funzione è illimitata. Non ammette perciò punti di estremo globali. La retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale (sia destro che sinistro). Non vi sono asintoti orizzontali.

Derivate:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \\ f'(x) &> 0 \Leftrightarrow x \in (e, +\infty) \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$

dunque la funzione è strettamente decrescente su $(0, 1)$ e su $(1, e)$. Strettamente crescente altrove. Il punto $x = e$ è evidentemente un punto di minimo locale forte.

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}$$

Per il segno di f'' è equivalente analizzare $\frac{2-\ln x}{\ln x}$ vista la positività di x e di $(\ln x)^2$.

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < e^2$$

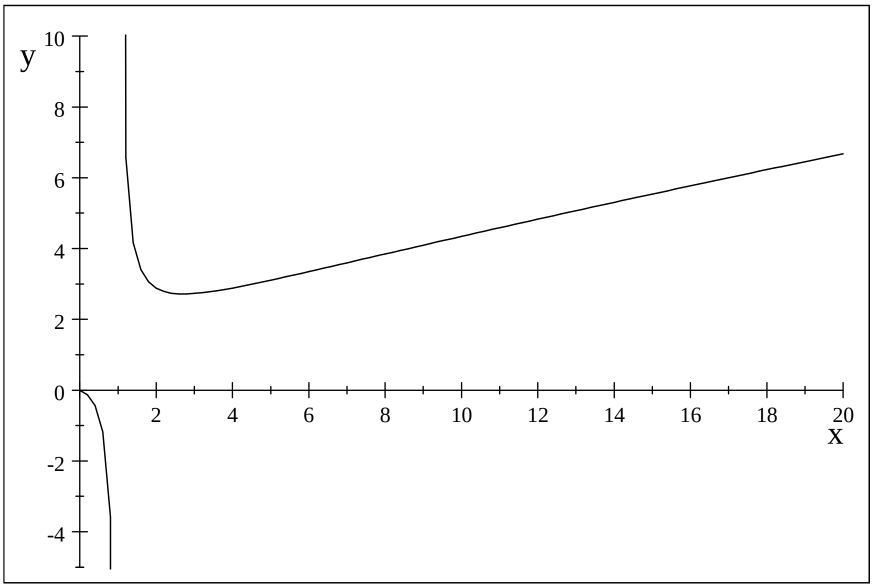
La funzione è perciò strettamente concava sia sul tratto $(0, 1)$ sia sul tratto $(e^2, +\infty)$. Strettamente convessa altrove. Il punto $x = e^2$ è punto di flesso.

Asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\ln x}}{x} &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} - 0x &= +\infty \end{aligned}$$

Non esistono asintoti obliqui.

Il grafico risulta



Infine, si può facilmente osservare che la funzione non è suriettiva; il suo insieme delle immagini è infatti $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{e}{\ln e} = 1, +\infty\right)$. f non è iniettiva.