Metodi Matematici 1 8cfu — 10 febbraio 2015

Equivalente a Metodi Quantitativi 1

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le risposte negli appositi spazi, giustificando le risposte. La brutta copia non va consegnata. E' vietato utilizzare materiale didattico, calcolatrici e comunicare in qualsiasi modo con altre persone. Tempo a disposizione: 90 minuti.

1 - Risolvere la seguente disequazione: $\ln(x^2 - 1) < 0$

Soluzione:

L'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo per cui il campo di esistenza è dato da $x < -1 \vee x > 1$.

Possiamo calcolare il logaritmo naturale (funzione crescente) di entrambi i membre ottenendo $x^2 - 1 < 1$. Le soluzioni sono perciò:

$$\begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ x^2 < 2 \end{cases}$$

$$SOL : (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$$

2 - Data $f : R \to R \;\; f(x) = e^{-x^2}$ determinare gli intervalli in cui f risulta essere **strettamente crescente**. Precisare se i punti estremi degli stessi siano o meno inclusi.

Soluzione:

f è derivabile sul proprio dominio con derivata prima $f\prime(x) = -2xe^{x^2}$. Il segno di f' coincide col segno di $-x$. Per cui per $x \leq 0$ f risulta essere strettamente crescente (per $x \geq 0$ f risulta essere strettamente decrescente).

3 - Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}-1}{x}$

Soluzione:

Per $x \to +\infty$ $e^{-x} - 1 \to -1$ quindi il limite non è in forma indeterminata. Il limite è 0^-.

4 - Enunciare il teorema di Lagrange. Stabilire se la funzione $f(x) = x^3$ sull'intervallo $[0, 1]$ rispetta le ipotesi del teorema e in caso affermativo determinare un punto di lagrange.

Soluzione:

Il teorema si può leggere su un qualunque testo di analisi.

La funzione è derivabile sull'intervallo $[0, 1]$ per cui rispetta ampiamente le ipotesi del teorema. La tesi del teorema afferma l'esistenza di un punto $c \in (0, 1)$ tale per cui:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \\ 3c^2 &= \frac{1 - 0}{1} = 1 \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$c = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

5 - Si studi la seguente funzione

$$f(x) = x + \frac{1}{1-x}$$

SOLUZIONE

Dominio - Il denominatore deve essere non nullo per cui il dominio è $dom(f) = (-\infty, 1) \cup (1 + \infty)$

Il dominio non è simmetrico rispetto all'origine quindi non ha senso indagare se la funzione sia pari o dispari.

f non presenta simmetrie.

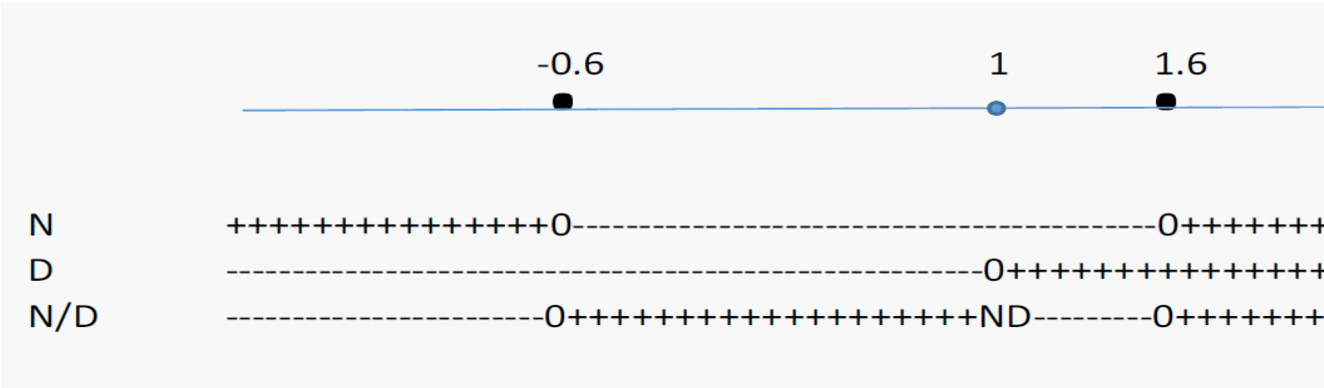
Intersezione assi - Essendo l'origine inclusa nel dominio è immediato determinare il punto di intersezione con l'asse delle ordinate: $(0, f(0)) = (0, 1)$.

I punti di intersezione con l'asse delle ascisse sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \simeq -0.6 \vee x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \simeq 1.6$$

Segno - Il segno della funzione si determina facilmente studiando il segno di numeratore e denominatore:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$$



Per cui

$$
\begin{array}{ll}
f < 0 & \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
f > 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \\
f = 0 & x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}
\end{array}
$$

Proprietà generali - La funzione è derivabile almeno due volte essendo somma e frazione di funzioni derivabili. In particolare f è continua.

Limiti:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 1} &= -\infty \\
\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x - 1}{x - 1} &= +\infty \\
\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x - 1}{x - 1} &= -\infty \\
\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 1} &= +\infty
\end{aligned}
$$

Nessun limite presenta una forma di indeterminazione. La funzione è naturalmente illimitata. Non ammette perciò punti di estremo globali.

Asintoti: La retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale (sia destro che sinistro). Non vi sono asintoti orizzontali. Asintoti obliqui:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + \frac{1}{1-x}}{x} &= 1 \\
\lim_{x \to \pm\infty} x + \frac{1}{1-x} - x &= 0
\end{aligned}
$$

La retta di equazione $y = x$ è asintoto obliquo sia sinistro sia destro.

Derivate:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}$$

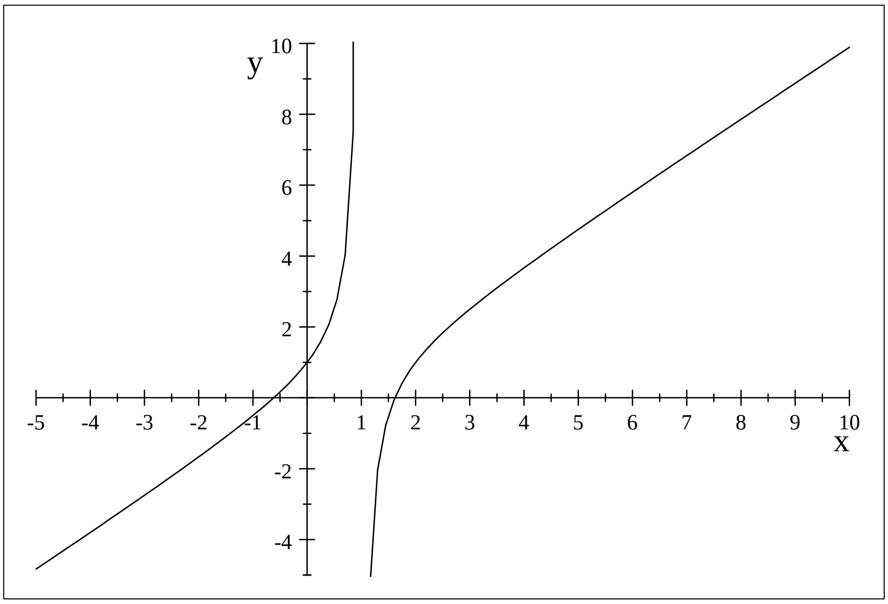
il numeratore è sempre strettamente positivo, come del resto il numeratore. La derivata prima sempre positiva sul dominio implica che la funzione è strettamente crescente sugli intervalli $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$. La funzione NON è monotona, presenta due intervalli di stretta monotonia. Non vi sono punti di estremo locale.

$$f''(x) = -\frac{2}{(x-1)^3} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

La funzione è perciò strettamente convessa sia su $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ e strettamente concava su $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$. Non vi sono punti di flesso.

Grafico:



Considerazioni finali: si può facilmente osservare che la funzione è suriettiva e non iniettiva.

Metodi Matematici 1 8cfu — 23 gennaio 2015

Equivalente a Metodi Quantitativi 1

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le risposte negli appositi spazi, giustificando le risposte. La brutta copia non va consegnata. E' vietato utilizzare materiale didattico, calcolatrici e comunicare in qualsiasi modo con altre persone. Tempo a disposizione: 90 minuti.

1 - Risolvere la seguente disequazione: $\ln(2-x^2) < \ln x$

Soluzione:

$\left(1, \sqrt{2}\right)$

2 - Data $f : R \to R \;\; f(x) = e^{x^2}$ determinare gli intervalli in cui f risulta essere **strettamente crescente**. Precisare se i punti estremi degli stessi siano o meno inclusi.

Soluzione:

$[0, +\infty)$

3 - Calcolare $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{x}$

Soluzione:

0

4 - Enunciare il teorema di Lagrange. Stabilire se la funzione $f(x) = 1 + x^2$ sull'intervallo $[0, 2]$ rispetta le ipotesi del teorema e in caso affermativo determinare un punto di lagrange.

Soluzione:

La funzione è derivabile sull'intervallo $[0, 2]$ per cui rispetta ampiamente le ipotesi del teorema. La tesi del teorema afferma l'esistenza di un punto $c \in (0, 2)$ tale per cui:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{f(2)-f(0)}{2-0} \\ 2c &= \frac{5-1}{2-0} = 2 \end{aligned}$$

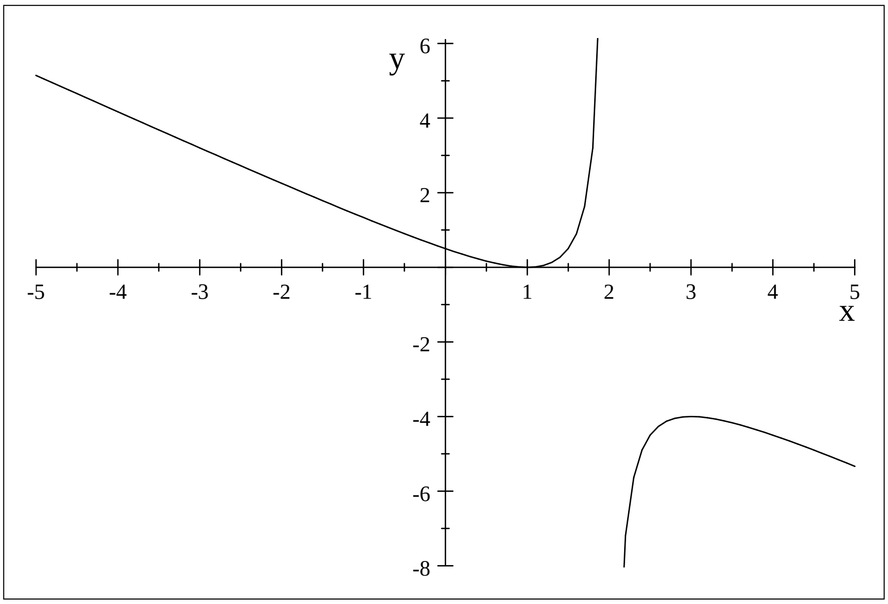
da cui si ricava:

$$c = 1$$

5 - Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{2-x} - x$$

Grafico:


y
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x