Metodi Matematici 1 8cfu — 20 febbraio 2015

Equivalente a Metodi Quantitativi 1

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le risposte negli appositi spazi, giustificando le risposte. La brutta copia non va consegnata. E' vietato utilizzare materiale didattico, calcolatrici e comunicare in qualsiasi modo. Tempo a disposizione: 90 minuti.

1 - Risolvere la seguente disequazione: $e^{2x} - 2e^x < 0$

Soluzione:

Il campo di esistenza della disequazione è R.

$$e^{2x} < 2e^x$$
$$\frac{e^{2x}}{e^x} < 2 \text{ (proprietà delle potenze)}$$
$$e^x < 2$$
$$x < \ln 2$$

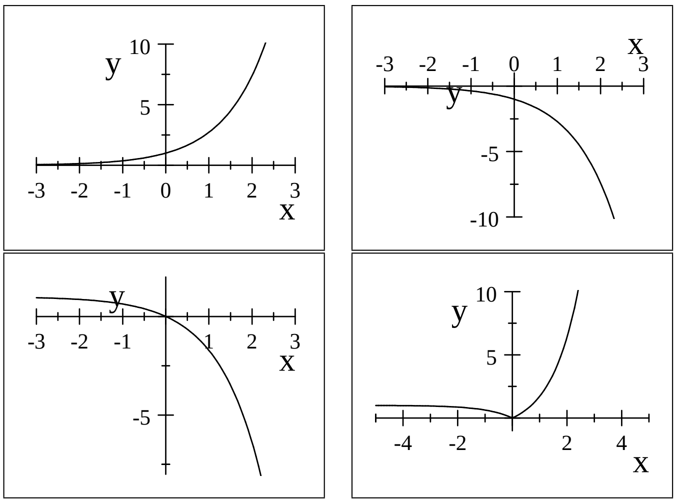
In alternativa, per sostituzione ponendo $y = e^x$.

2 - Data $f : R \to R \;\; f(x) = e^x$ si disegni il grafico di $g(x) = |1 - f(x)|$.

Soluzione:

Partendo dalla funzione f, per operazioni di rotazione, traslazione e valore assoluto si hanno in sequenza le seguenti trasformazioni:

$f(x) = e^x$



3 - Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x^2}$

Soluzione:

Il limite è in forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Utilizzando de l'Hopital si ottiene $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{2x}$ che non esiste. Più specificatamente $\lim_{x\to 0^\pm}\frac{e^{-x}}{2x}=\pm\infty$.

4 - Fornire la definizione di funzione iniettiva. Stabilire se la funzione $f(x)=e^{-x^2}$ è iniettiva sul suo dominio naturale.

Soluzione:

Una funzione $f: X \to R$ è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in X$ si ha che $f(x_1)\neq f(x_2)$. Alternativamente, ogni $y\in im(f)$ è immagine di un solo elemento di X.

$f(x)=e^{-x^2}$ è una funzione definita su tutto R e pari per cui non è iniettiva. Se non si scorgesse la simmetria della funzione si può passare al calcolo differenziale. f è derivabile sul suo dominio con derivata prima pari a $f'(x)=-2xe^{-x^2}$. Si ha:

$$f'>0 \Longleftrightarrow x<0 \quad \text{e} \quad f'<0 \Longleftrightarrow x>0$$

dunque f è strettamente crescente sul semiasse negativo e strettamente decrescente su quello positivo. $x=0$ è punto di massimo globale forte. Inoltre f è continua. Ciò dimostra chiaramente che f non è iniettiva.

5 - Si studi la seguente funzione

$$f(x)=\frac{x-3}{2x^2}$$

SOLUZIONE

La funzione è definita per $x\neq 0$. Dato che $f(-x)=\frac{-x-3}{2x^2}$ non coincide nè con $f(x)$ nè con $-f(-x)$ la funzione non presenta simmetrie.
Il segno dipende dal numeratore essendo il denominatore sempre strettamente positivo sul dominio. f è dunque positiva ssse $x>3$.
Il punto $x=3$ $y=0$ è punto di intersezione del grafico di f con l'asse delle ascisse.
I limiti sono:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x\to 0^\pm} f(x)=-\infty & x=0 \text{ asintoto verticale dx e sx} \\ \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0^\pm & y=0 \text{ asintoto orizzontale dx e sx} \end{array}$$

Non possono quindi esistere asintoti obliqui.
La funzione è rapporto di funzioni elementari derivabili per cui risulta essere derivabile e in particolare continua.

La derivata prima risulta

$$f'(x)=\frac{2x^2-(x-3)\cdot 4x}{4x^4}=\frac{6-x}{2x^3}$$

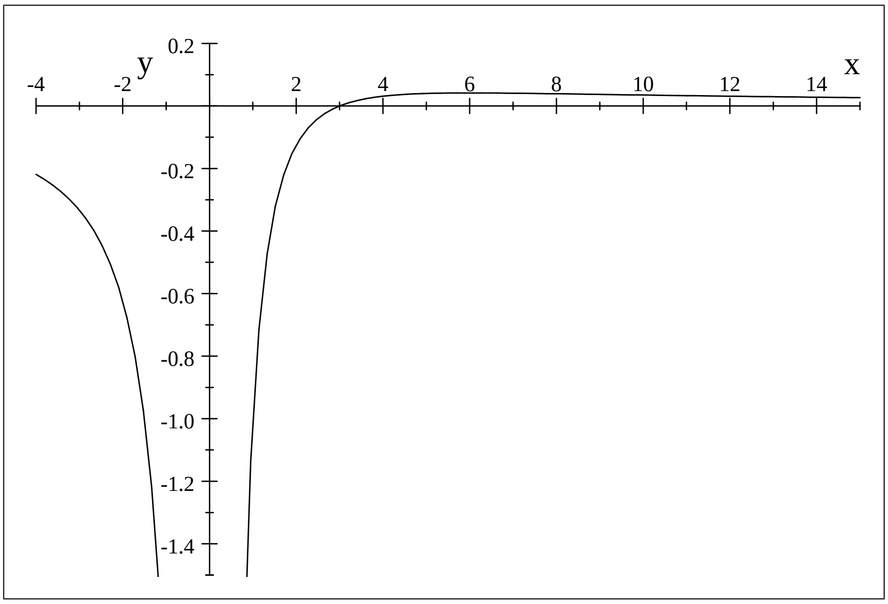
La derivata prima risulta definita $\forall x\neq 0$, strettamente positiva per $0<x<6$, nulla per $x=6$, strettamente negativa altrove. Da ciò discende la stretta crescenza della

f per $0 < x < 6$, la presenza di un punto di massimo globale forte in $x = 6$ e la stretta decrescenza sia per $x > 6$ sia per $x < 0$.

La funzione è derivabile 2 volte con derivata seconda

$$f''(x) = \frac{-2x^3 - (6-x)\cdot 6x^2}{4x^6} = \frac{x-9}{x^4}$$

positiva (che implica convessità per f) per $x > 9$ e negativa altrove. Il punto $x = 9$ è punto di flesso.



Metodi Matematici 1 8cfu		20 febbraio 2015
Equivalente a Metodi Quantitativi 1		
Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le risposte negli appositi spazi, **giustificando le risposte**. La brutta copia non va consegnata. E' vietato utilizzare materiale didattico, calcolatrici e comunicare in qualsiasi modo. Tempo a disposizione: 90 minuti.

1 - Risolvere la seguente disequazione: $3e^{2x} - e^x > 0$

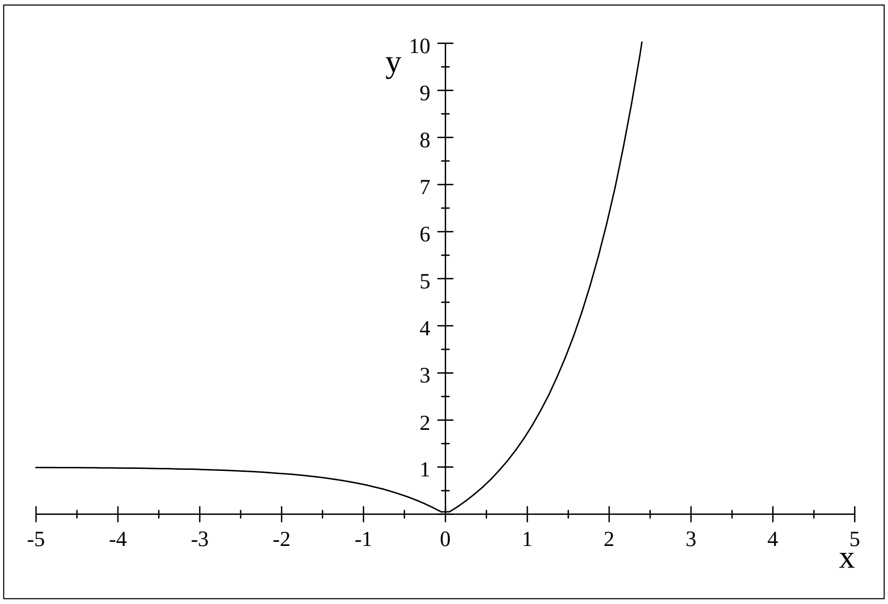
Soluzione:

$(-\ln 3, \infty)$

2 - Data $f : R \to R \;\; f(x) = e^x$ si disegni il grafico di $g(x) = |f(x) - 1|$.

Soluzione:

$f(x) = |e^x - 1|$



3 - Calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+e^{-x}}{x^2}$

Soluzione:

$+\infty$

4 - Fornire la definizione di funzione suriettiva. Stabilire se la funzione $f : R \to R$, $f(x) = e^{x^2}$ è suriettiva.

Soluzione:

Per la definizione consultare un qualunque testo.

f non è suriettiva avendo come insieme delle immagini $im(f) = [1, +\infty)$. Ciò si evince dall'andamento della funzione esponenziale e dalla positività dell'esponente. Oppure col calcolo differenziale utilizzando semplicemente la derivata prima.

5 - Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x+4}{2x^2}$$

SOLUZIONE

La funzione è definita per $x \neq 0$. Dato che $f(-x) = \frac{-x+4}{2x^2}$ non coincide nè con $f(x)$ nè con $-f(-x)$ la funzione non presenta simmetrie.
Il segno dipende dal numeratore essendo il denominatore sempre strettamente positivo sul dominio. f è dunque positiva ssse $x > -4$.
Il punto $x = -4$ $y = 0$ è punto di intersezione del grafico di f con l'asse delle ascisse.
I limiti sono:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = +\infty & x = 0 \text{ asintoto verticale dx e sx} \\ \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0^{\pm} & y = 0 \text{ asintoto orizzontale dx e sx} \end{array}$$

Non possono quindi esistere asintoti obliqui.
La funzione è rapporto di funzioni elementari derivabili per cui risulta essere derivabile e in particolare continua.

Le derivate risultano
$f'(x) = -\frac{x+8}{2x^3} > 0$, pt di minimo in $x = -8$
$f''(x) = \frac{x+12}{x^4}$, flesso in $x = -12$