Metodi Matematici 1 8cfu 19 giugno 2015

Equivalente a Metodi Quantitativi 1

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le risposte negli appositi spazi, giustificando le risposte. La brutta copia non va consegnata. E' vietato utilizzare materiale didattico, calcolatrici e comunicare in qualsiasi modo con altre persone. Tempo a disposizione: 90 minuti.

1 - Risolvere la seguente disequazione: $\ln x < 2$

Soluzione:

L'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo per cui il campo di esistenza è dato da $x > 0$.

Possiamo calcolare l'esponenziale di entrambi i membri ottenendo (si ricordi che la funzione che si sta applicando, l'esponenziale appunto è strettamente crescente) $e^{\ln x} < e^2$. Le soluzioni sono perciò:

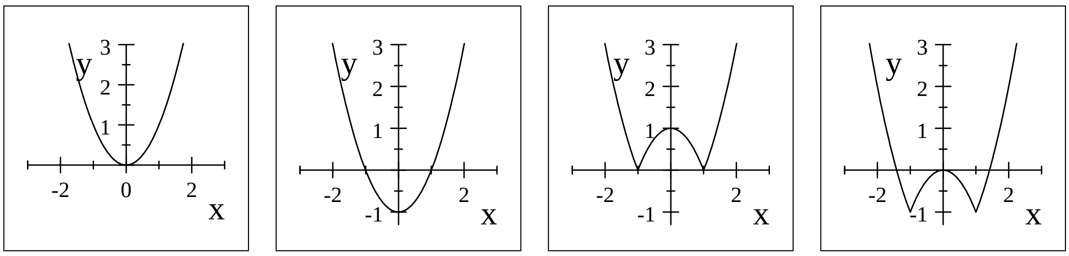
$$\begin{cases} x > 0 \\ x < e^2 \end{cases}$$

$$SOL : (0, e^2)$$

2 - Disegnare utilizzando le trasformazioni usuali il grafico di $f(x) = \left|x^2 - 1\right| - 1$.

Soluzione:

Partendo dalla funzione $f(x) = x^2$ procediamo con le trasformazioni richieste dalla legge di f :



3 - Calcolare $\lim_{x\to 0^+} e^x - \ln x$

Soluzione:

Per $x \to 0^+$ $e^x \to 1$ mentre $\ln x \to -\infty$ quindi il limite non è in forma indeterminata e risulta pari a $+\infty$.

4 - Dare la definizione di funzione monotona strettamente crescente. Stabilire se la funzione $f(x) = -\frac{1}{x}$ è, sul proprio dominio naturale, una funzione monotona.

Soluzione:

La definizione può essere consultata sui testi.

La funzione è una funzione elementare dal cui grafico è evidente che non ci sia monotonia. Volendolofunzione è definita e derivabile su tutto l'asse reale tranne che in 0. La derivata prima risulta

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \neq 0$$

osservando il comportamento di f nell'intorno dell'origine:

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$$

si conclude che la funione non è monotona sul proprio dominio.

5 - Si studi la seguente funzione

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$$

Soluzione:

Dominio - Il denominatore deve essere non nullo per cui il dominio è $dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0 + \infty)$

Il dominio è simmetrico rispetto all'origine e $f(-x) = -f(x)$ quindi la funzione è dispari. Proseguiremo il suo studio per $x > 0$.

Intersezione assi - Essendo l'origine esclusa dal dominio è non vi sono intersezioni dell'asse delle ordinate. I punti di intersezione con l'asse delle ascisse sono le radici dell'equazione $f(x) = 0$:

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{x} = \frac{x^4 - 1}{x} = 0 \Longleftrightarrow x^4 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm 1$$

Segno - Il segno della funzione si determina facilmente:

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x^4 > 1 \Longleftrightarrow x > 1$$

Proprietà generali - La funzione è derivabile almeno due volte essendo somma e frazione di funzioni derivabili. In particolare f è continua.

Limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 - \frac{1}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} x^3 - \frac{1}{x} = +\infty$$

Nessun limite presenta una forma di indeterminazione. La funzione è naturalmente illimitata. Non ammette perciò punti di estremo globali.

Asintoti: La retta di equazione $x = 0$ è asintoto verticale destro. Non vi sono asintoti orizzontali. Asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - \frac{1}{x}}{x} = +\infty$$

La funzione non ammette asintoti obliqui.

Derivate:

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \neq 0$$

La derivata prima sempre positiva implica che la funzione sia strettamente crescente sull'intervallo $(0; +\infty)$. Non vi sono punti di estremo locale.

$$f''(x) = 6x - \frac{2}{x^3} = \frac{6x^4 - 2}{x^3} = 2\frac{3x^4 - 1}{x^3}$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x^4 > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

La funzione è perciò strettamente concava su $\left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$ e strettamente convessa su $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, +\infty\right)$ con $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ è punto di flesso.

Grafico: Sfruttando il fatto che la funzione è dispari se ne può disegnare il grafico su tutto il dominio. Si può osservare che la funzione è suriettiva e non iniettiva.