Metodi Matematici 1 8cfu — 22 gennaio 2014

Equivalenza con Metodi Quantitativi 1

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le risposte negli appositi spazi. La brutta copia non va consegnata. E' vietato utilizzare materiale didattico, calcolatrici e comunicare in qualsiasi modo con altre persone. Tempo a disposizione: 90 minuti.

1 - Risolvere la seguente disequazione: $\sqrt{x+4} - x - 2 \geq 0$

Soluzione:

L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo per cui il campo di esistenza è dato da $x + 4 \geq 0$ ovvero $x \geq -4$.

Possiamo così riscrivere la disequazione: $\sqrt{x+4} \geq x + 2$. Le soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} x \geq -4 \\ x + 2 \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq -4 \\ x + 2 > 0 \\ x + 4 \geq (x+2)^2 \end{cases}$$

$$[-4, -2] \cup \begin{cases} x > -2 \\ x(x+3) \leq 0 \end{cases}$$

$$[-4, -2] \cup [-2, 0] = [-4, 0].$$

2 - Data $f(x) = \frac{1}{x^2}$ determinare la funzione $f(f(x))$.

Soluzione:

$$f(f(x)) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = x^4$$

3 - Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x - \ln x + x^2}{3x^2 - \sqrt{x}}$

Soluzione:

Trascurando gli infiniti di ordine inferiore il limite diventa

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

4 - L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^{2x} - x$ nel punto $x = 0$ è:

Soluzione:

La funzione è derivabile quindi la retta tangente nel punto $x = 0$ esiste. Dato che

$$f(0) = 1 \qquad f'(x) = 2e^{2x} - 1 \qquad f'(0) = 1$$

l'equazione della retta tangente è

$$y = 1 + 1(x - 0) = x + 1$$

5 - Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \ln(x^2) - 3x$$

Soluzione:
$dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
Il dominio è simmetrico rispetto all'origine quindi ha senso indagare se la funzione presenti simmetrie:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(x^2) + 3x \\ f(-x) &\neq f(x) \\ f(-x) &\neq -f(x) \end{aligned}$$

f non presenta simmetrie.

La funzione è derivabile almeno due volte essendo composizione e somma di funzioni derivabili. In particolare f è continua.

Non essendo l'origine inclusa nel dominio non esiste intersezione con l'asse delle ordinate. Tralasceremo la ricerca dei punti di intersezione con l'asse delle ascisse e lo studio del segno della funzione. Il quadro sarà comunque chiaro al termine dello studio di funzione.

Limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \ln(x^2) - 3x &= +\infty \\ \lim_{x\to0^-} \ln(x^2) - 3x &= -\infty \\ \lim_{x\to0^+} \ln(x^2) - 3x &= -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x^2) - 3x &= -\infty \end{aligned}$$

L'unica forma indeterminata è quella del quarto limite e si rivolve osservando che le potenze sono infiniti di ordine superiore rispetto ai logaritmi. La funzione è illimitata. Non ammette perciò punti di estremo globali. La retta di equazione $x = 0$ è asintoto verticale (sia destro che sinistro). Non vi sono asintoti orizzontali.

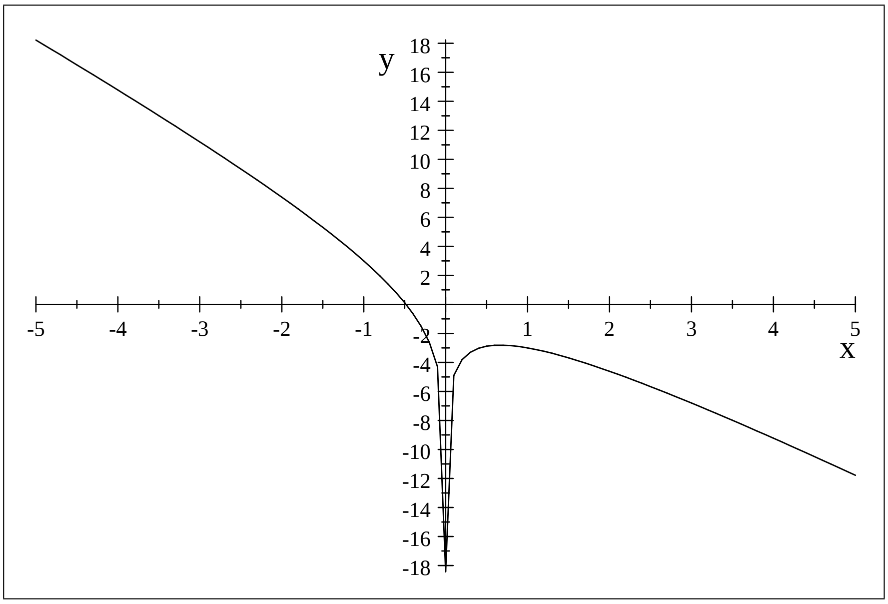
Derivate:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{x^2} - 3 = \frac{2}{x} - 3 \\ f'(x) &> 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

dunque la funzione è strettamente decrescente sul semiasse negativo, strettamente crescente sul tratto $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ e strettamente decrescente sul tratto $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Il punto $x = \frac{2}{3}$ è evidentemente un punto di massimo locale forte. Il massimo locale forte risulta $f\left(\frac{2}{3}\right) = \ln \frac{4}{9} - 2 < 0$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2}{x^2} \\ f'(x) &< 0 \quad \forall x \end{aligned}$$

La funzione è strettamente concava sia sul tratto $(-\infty, 0)$ sia sul tratto $(0, +\infty)$. Il grafico risulta



Conclusioni finali che potevano essere tratte già durante lo studio ma che ora sono lampanti sono: la funzione è suriettiva ma non iniettiva.Vi è un solo punto di intersezione con l'asse delle ascisse. Tale punto è circa -0.5 (il calcolo preciso di questo punto in tempi ragionevoli può essere fatto con calcolatori e quindi lo tralasceremo). Per x minori di tale valore la funzione è positiva. Per x maggiori la funzione è negativa.

Asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(x^2) - 3x}{x} &= -3 \\ \lim_{x \to +\infty} \ln(x^2) - 3x - (-3x) &= +\infty \end{aligned}$$

Non esistono asintoti obliqui.