Metodi Matematici 1 8cfu — 5 febbraio 2014

Equivalenza con Metodi Quantitativi 1

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le risposte negli appositi spazi. La brutta copia non va consegnata. E' vietato utilizzare materiale didattico, calcolatrici e comunicare in qualsiasi modo con altre persone. Tempo a disposizione: 90 minuti.

1 - Risolvere la seguente disequazione: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \geq -1$

Soluzione:

L'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo per cui il campo di esistenza è dato da $x^2 - 1 > 0$ ovvero $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Si può passare all'esponente di base $\frac{1}{2}$ di entrambi i membri, ricordando che la base è inferiore ad 1 e si richiede il cambio di segno nella disequazione.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$x^2 - 1 \leq 2 \quad \text{ovvero} \quad x^2 \leq 3$$

Le soluzioni sono date da:

$$\left[-\sqrt{3}, -1\right) \cup \left(1, \sqrt{3}\right].$$

2 - Utilizzando il teorema della derivata di funzione composta si calcoli la derivata prima di:

$$f(x) = (1 - 3x^2)^5$$

Soluzione:

$$f'(x) = 5(1 - 3x^2)^4(-6x) = -30x(1 - 3x^2)^4$$

3 - Sia data la funzione $f(x) = e^{x-1}$ si determini la controimmagine dell'insieme $[-1, 1]$ tramite la funzione f, ovvero $f^{-1}([-1, 1])$

Soluzione:

E' richiesto di determinare i valori del dominio di f tali per cui si abbia $-1 \leq f \leq 1$. Il dominio della funzione è R. Deve quindi essere

$$-1 \leq e^{x-1} \leq 1$$

da cui

$$x \leq 1$$

4 - Sia data la funzione $f(x) = (x-1)^2$. Si stabilisca se la funzione rispetta le ipotesi del teorema di Lagrange sull'intervallo $[0,3]$ e in caso affermativo si (determini e si) esibisca un punto che rispetta la condizione della tesi del teorema.

Soluzione:

La funzione è derivabile su tutto il proprio dominio R quindi le ipotesi del teorema di Lagrange sono rispettate sull'intervallo dato. Il teorema garantisce l'esistenza di almeno un punto c interno all'intervallo in cui valga

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = f'(c)$$

$$\frac{4-1}{3-0} = 2(c-1)$$

da cui è immediato identificare l'unico punto c che soddisfa tale condizione nel caso dato:

$$c = \frac{3}{2}$$

5 - Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1-2x^2}{1+x}$$

Soluzione:

La funzione è definita per tutte le x tali per cui $1+x \neq 0$ quindi

$$X = dom(f) = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$$

Il dominio non è simmetrico rispetto all'origine quindi ha non senso indagare se la funzione presenti simmetrie. Non ve ne possono essere.

Studiamo il segno della funzione iniziando con lo studiare separatamente numeratore e denominatore:

$$\begin{array}{ccccc} N>0 & \iff & 1-2x^2>0 & \iff & -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ D>0 & \iff & 1+x>0 & \iff & x>-1 \end{array}$$

da cui si conclude che

$$\begin{array}{ccc} f>0 & \iff & x \in (-\infty,-1) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ f<0 & \iff & x \in \left(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right) \end{array}$$

Peraltro $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ e $f(0) = 1$.

La funzione è continua essendo rapporto di funzioni continue. I limiti interessanti risultano essere:

$$\begin{array}{lccc} 1) & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1-2x^2}{1+x} = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{-2x^2}{x} = \pm\infty & \\ 2) & \lim_{x\to 1^{\mp}} \frac{1-2x^2}{1+x} = & \pm\infty & \\ 3) & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1-2x^2}{x+x^2} = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \\ 4) & \lim_{x\to\mp\infty} f(x)-(-2x) = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1-2x^2+2x+2x^2}{1+x} = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{2x}{x} = 2 \end{array}$$

Dal punto 1 si evince che la funzione è illimitata e non ammette asintoti orizzontali.

Dal punto 2 oltre a confermare l'illimitatezza di f si individua un asintoto verticale di equazione $x = -1$.

Dai punti 3 e 4 si individuano gli asintoti obliqui sinistro e destro di equazione $y = -2x + 2$.

f risulta essere derivabile sul proprio dominio essendo rapporto di funzioni derivabili. Il calcolo della derivata prima conduce a:

$$f'(x) = \frac{-4x(1+x) - (1-2x^2)1}{(1+x)^2} = -\frac{\left(2x^2+4x+1\right)}{(x+1)^2}$$

avente stesso dominio di f.

Il segno di f' dipende dal segno di $-\left(2x^2+4x+1\right)$ essendo il denominatore sempre positivo. Studiarne il segno è immediato e conduce alle seguenti conclusioni:

$$\begin{aligned} f' > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} - 1, -1\right) \cup \left(-1, \tfrac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \\ f' < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, -\tfrac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \cup \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - 1, +\infty\right) \end{aligned}$$

Per cui f non è monotona e presenta le seguenti caratteristiche:

- f è strettamente decrescente sull'intervallo $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$, strettamente crescente sull'intervallo $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1, -1\right)$ presentando nel punto $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$ un punto di minimo locale forte

- f è strettamente crescente sull'intervallo $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$ e strettamente decrescente sull'intervallo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1, +\infty\right)$ presentando nel punto $x = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$ un punto di massimo locale forte.

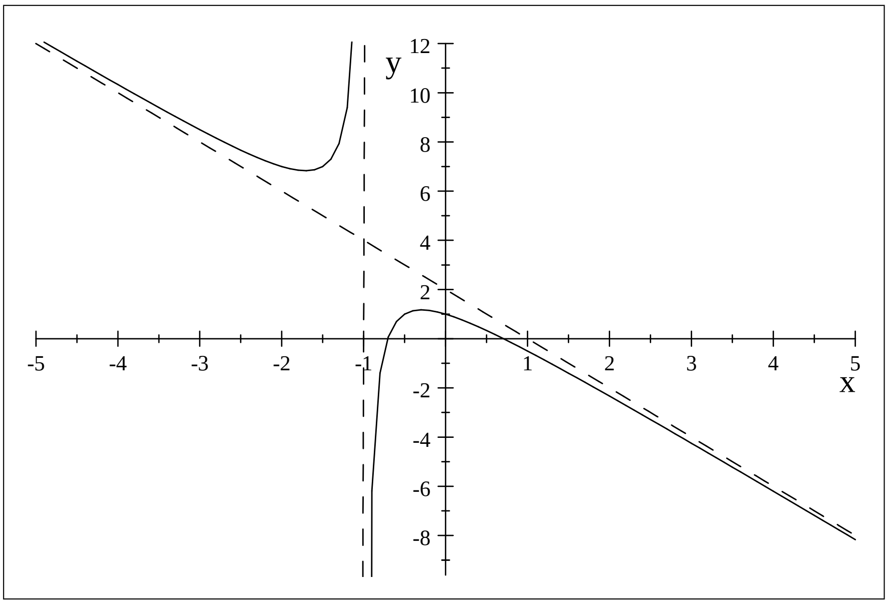
La derivata prima risulta essere essa stessa derivabile sul proprio dominio per cui f è derivabile due volte su X con derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{(4x+4)(x+1)^2 - (2x^2+4x+1)2(x+1)}{(x+1)^4} = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

Il segno è immediato:

$$\begin{aligned} f'' > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \quad \text{tratto di stretta convessità di } f \\ f' < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in (-1, +\infty) \quad \text{tratto di stretta concavità di } f \end{aligned}$$

Aiutandosi con gli asintoti e le intersezioni degli assi non è neppure necessario il noioso calcolo del valore del minimo e del massimo per tracciare un grafico qualitativo della funzione.



y
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
x

Metodi Matematici 1 8cfu		5 febbraio 2014
Equivalenza con Metodi Quantitativi 1		
Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le risposte negli appositi spazi. La brutta copia non va consegnata. E' vietato utilizzare materiale didattico, calcolatrici e comunicare in qualsiasi modo con altre persone. Tempo a disposizione: 90 minuti.

1 - Risolvere la seguente disequazione: $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1) \geq -1$

Soluzione:

$$[-2,-1) \cup (1,2]\,.$$

2 - Utilizzando il teorema della derivata di funzione composta si calcoli la derivata prima di $f(x) = (1-4x^2)^5$:

Soluzione:

$$-40x(1-4x^2)^4$$

3 - Sia data la funzione $f(x) = e^{1-x}$ si determini la controimmagine dell'insieme $[-1,1]$ tramite la funzione f, ovvero $f^{-1}([-1,1])$

Soluzione:

$$x \geq 1$$

4 - Sia data la funzione $f(x) = (x-1)^2$. Si stabilisca se la funzione rispetta le ipotesi del teorema di Lagrange sull'intervallo $[0,4]$ e in caso affermativo si (determini e si) esibisca un punto che rispetta la condizione della tesi del teorema.

Soluzione:

$$x = 2$$

5 - Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1-2x^2}{2+x}$$

Soluzione:

La funzione è definita per tutte le x tali per cui $2+x \neq 0$ quindi

$$X = dom(f) = (-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$$

Il dominio non è simmetrico rispetto all'origine quindi ha non senso indagare se la funzione presenti simmetrie. Non ve ne possono essere.

Studiamo il segno della funzione iniziando con lo studiare separatamente numeratore e denominatore:

$$\begin{array}{cccc} N > 0 & \iff & 1 - 2x^2 > 0 & \iff & -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ D > 0 & \iff & 2 + x > 0 & \iff & x > -2 \end{array}$$

da cui si conclude che

$$\begin{array}{ccc} f > 0 & \iff & x \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ f < 0 & \iff & x \in \left(-2, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right) \end{array}$$

Peraltro $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ e $f(0) = \frac{1}{2}$.

La funzione è continua essendo rapporto di funzioni continue. I limiti interessanti risultano essere:

$$\begin{array}{llll} 1) & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1-2x^2}{2+x} = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{-2x^2}{x} = \pm\infty & \\ 2) & \lim_{x\to 2^{\mp}} \frac{1-2x^2}{2+x} = & \pm\infty & \\ 3) & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1-2x^2}{2x+x^2} = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \\ 4) & \lim_{x\to\mp\infty} f(x) - (-2x) = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1-2x^2+4x+2x^2}{2+x} = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{4x}{x} = 4 \end{array}$$

Dal punto 1 si evince che la funzione è illimitata e non ammette asintoti orizzontali.

Dal punto 2 oltre a confermare l'illimitatezza di f si individua un asintoto verticale di equazione $x = -2$.

Dai punti 3 e 4 si individuano gli asintoti obliqui sinistro e destro di equazione $y = -2x + 4$.

f risulta essere derivabile sul proprio dominio essendo rapporto di funzioni derivabili. Il calcolo della derivata prima conduce a:

$$f'(x) = \frac{-4x(x+2) - 1(1-2x^2)}{(x+2)^2} = -\frac{2x^2+8x+1}{(x+2)^2}$$

avente stesso dominio di f.

Il segno di f' dipende dal segno di $-\left(2x^2+8x+1\right)$ essendo il denominatore sempre positivo. Studiarne il segno è immediato e conduce alle seguenti conclusioni:

$$\begin{array}{ccc} f' > 0 & \iff & x \in \left(-\sqrt{\frac{7}{2}} - 2, -2\right) \cup \left(-2, \sqrt{\frac{7}{2}} - 2\right) \\ f' < 0 & \iff & x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}} - 2\right) \cup \left(\sqrt{\frac{7}{2}} - 2, +\infty\right) \end{array}$$

Per cui f non è monotona e presenta le seguenti caratteristiche:

- f è strettamente decrescente sull'intervallo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}} - 2\right)$, strettamente crescente sull'intervallo $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}} - 2, -2\right)$ presentando nel punto $x = -\sqrt{\frac{7}{2}} - 2$ un punto di minimo locale forte
- f è strettamente crescente sull'intervallo $\left(-2, \sqrt{\frac{7}{2}} - 2\right)$ e strettamente decrescente sull'intervallo $\left(\sqrt{\frac{7}{2}} - 2, +\infty\right)$ presentando nel punto $x = \sqrt{\frac{7}{2}} - 2$ un punto di massimo locale forte.

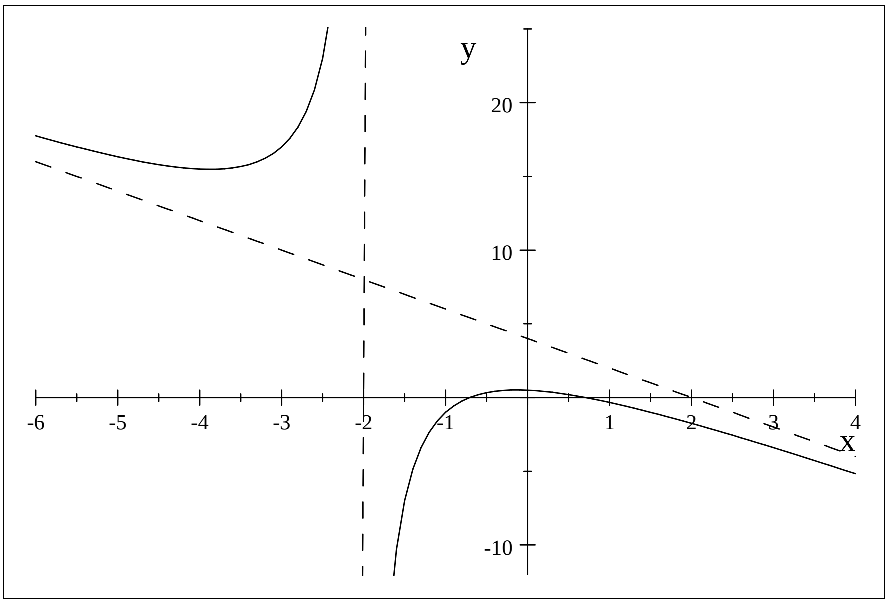
La derivata prima risulta essere essa stessa derivabile sul proprio dominio per cui f è derivabile due volte su X con derivata seconda:

$$f''(x) = -\frac{(4x+8)(2+x)^2 - (2x^2+8x+1)2(2+x)}{(2+x)^4} = -\frac{14}{(x+2)^3}$$

Il segno è immediato:

$$\begin{array}{lcll} f'' > 0 & \iff & x \in (-\infty, -2) & \text{tratto di stretta convessità di } f \\ f' < 0 & \iff & x \in (-2, +\infty) & \text{tratto di stretta concavità di } f \end{array}$$

Aiutandosi con gli asintoti e le intersezioni degli assi non è neppure necessario il noioso calcolo del valore del minimo e del massimo per tracciare un grafico qualitativo della funzione.



Metodi Matematici 1 8cfu		5 febbraio 2014
Equivalenza con Metodi Quantitativi 1		
Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le risposte negli appositi spazi. La brutta copia non va consegnata. E' vietato utilizzare materiale didattico, calcolatrici e comunicare in qualsiasi modo con altre persone. Tempo a disposizione: 90 minuti.

1 - Risolvere la seguente disequazione: $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-1) \geq -1$

Soluzione:

$$\left[-\sqrt{5},-1\right) \cup \left(1,\sqrt{5}\right].$$

2 - Utilizzando il teorema della derivata di funzione composta si calcoli la derivata prima di $f(x) = (1-5x^2)^5$:

Soluzione:

$$-50x(1-5x^2)^4$$

3 - Sia data la funzione $f(x) = e^{x-2}$ si determini la controimmagine dell'insieme $[-1,1]$ tramite la funzione f, ovvero $f^{-1}([-1,1])$

Soluzione:

$$x \leq 2$$

4 - Sia data la funzione $f(x) = (x-2)^2$. Si stabilisca se la funzione rispetta le ipotesi del teorema di Lagrange sull'intervallo $[0,3]$ e in caso affermativo si (determini e si) esibisca un punto che rispetta la condizione della tesi del teorema.

Soluzione:

$$x = \frac{3}{2}$$

5 - Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{2x^2-1}{1+x}$$

Soluzione:

La funzione è definita per tutte le x tali per cui $1+x \neq 0$ quindi

$$X = dom(f) = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$$

Il dominio non è simmetrico rispetto all'origine quindi ha non senso indagare se la funzione presenti simmetrie. Non ve ne possono essere.

Studiamo il segno della funzione iniziando con lo studiare separatamente numeratore e denominatore:

$$\begin{array}{ccccc} N > 0 & \iff & 2x^2 - 1 < 0 & \iff & -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ D > 0 & \iff & 1 + x > 0 & \iff & x > -1 \end{array}$$

da cui si conclude che

$$\begin{array}{ccc} f > 0 & \iff & x \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right) \\ f < 0 & \iff & x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}$$

Peraltro $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ e $f(0) = -1$.

La funzione è continua essendo rapporto di funzioni continue. I limiti interessanti risultano essere:

$$\begin{array}{llll} 1) & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{2x^2-1}{1+x} = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{2x^2}{x} = \mp\infty & \\ 2) & \lim_{x\to 1^\mp} \frac{2x^2-1}{1+x} = & \mp\infty & \\ 3) & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{2x^2-2}{x+x^2} = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \\ 4) & \lim_{x\to\mp\infty} f(x) - (2x) = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{2x^2-1-2x-2x^2}{1+x} = & \lim_{x\to\mp\infty} \frac{-2x}{x} = -2 \end{array}$$

Dal punto 1 si evince che la funzione è illimitata e non ammette asintoti orizzontali.

Dal punto 2 oltre a confermare l'illimitatezza di f si individua un asintoto verticale di equazione $x = -1$.

Dai punti 3 e 4 si individuano gli asintoti obliqui sinistro e destro di equazione $y = 2x - 2$.

f risulta essere derivabile sul proprio dominio essendo rapporto di funzioni derivabili. Il calcolo della derivata prima conduce a:

$$f'(x) = \frac{4x(1+x) - (2x^2-1)1}{(1+x)^2} = \frac{\left(2x^2+4x+1\right)}{(x+1)^2}$$

avente stesso dominio di f.

Il segno di f' dipende dal segno di $\left(2x^2 + 4x + 1\right)$ essendo il denominatore sempre positivo. Studiarne il segno è immediato e conduce alle seguenti conclusioni:

$$\begin{array}{ccc} f' > 0 & \iff & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1, +\infty\right) \\ f' < 0 & \iff & x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1, -1\right) \cup \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \end{array}$$

Per cui f non è monotona e presenta le seguenti caratteristiche:

- f è strettamente crescente sull'intervallo $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$, strettamente decrescente sull'intervallo $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 1, -1\right)$ presentando nel punto $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$ un punto di massimo locale forte
- f è strettamente decrescente sull'intervallo $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$ e strettamente crescente sull'intervallo $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1, +\infty\right)$ presentando nel punto $x = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$ un punto di minimo locale forte.

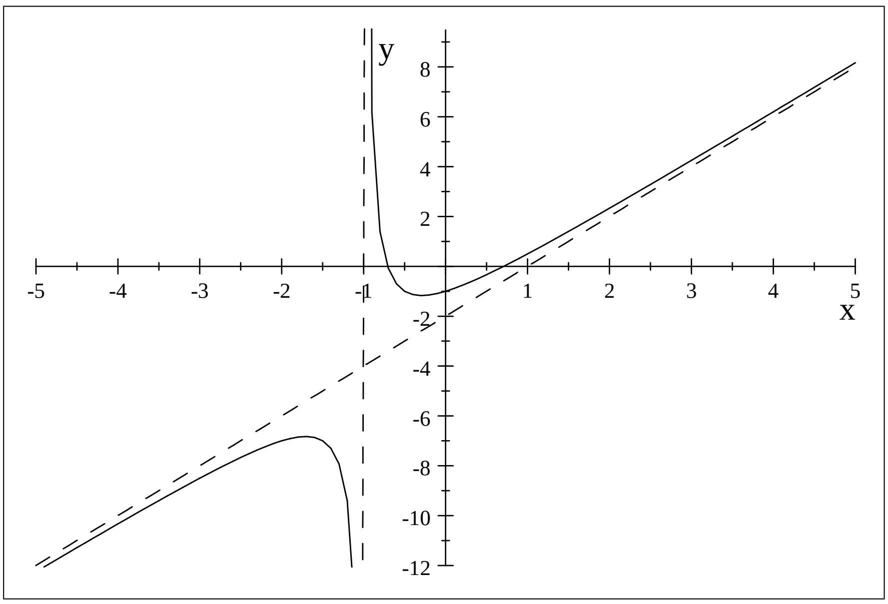
La derivata prima risulta essere essa stessa derivabile sul proprio dominio per cui f è derivabile due volte su X con derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{(4x+4)(x+1)^2 - (2x^2+4x+1)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

Il segno è immediato:

$$\begin{array}{llll} f'' < 0 & \iff & x \in (-\infty, -1) & \text{tratto di stretta concavità di } f \\ f' > 0 & \iff & x \in (-1, +\infty) & \text{tratto di stretta convessità di } f \end{array}$$

Aiutandosi con gli asintoti e le intersezioni degli assi non è neppure necessario il noioso calcolo del valore del minimo e del massimo per tracciare un grafico qualitativo della funzione.



# Metodi Matematici 1 8cfu		5 febbraio 2014
Equivalenza con Metodi Quantitativi 1		
Cognome	**Nome**	**Matricola**

Scrivere le risposte negli appositi spazi. La brutta copia non va consegnata. E' vietato utilizzare materiale didattico, calcolatrici e comunicare in qualsiasi modo con altre persone. Tempo a disposizione: 90 minuti.

1 - Risolvere la seguente disequazione: $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-1) \geq -1$

Soluzione:

$$\left[-\sqrt{6},-1\right) \cup \left(1,\sqrt{6}\right].$$

2 - Utilizzando il teorema della derivata di funzione composta si calcoli la derivata prima di $f(x) = (1-6x^2)^5$:

Soluzione:

$$-60x(1-6x^2)^4$$

3 - Sia data la funzione $f(x) = e^{2-x}$ si determini la controimmagine dell'insieme $[-1,1]$ tramite la funzione f, ovvero $f^{-1}([-1,1])$

Soluzione:

$$x \geq 2$$

4 - Sia data la funzione $f(x) = (x-2)^2$. Si stabilisca se la funzione rispetta le ipotesi del teorema di Lagrange sull'intervallo $[0,5]$ e in caso affermativo si (determini e si) esibisca un punto che rispetta la condizione della tesi del teorema.

Soluzione:

$$x = \frac{5}{2}$$

5 - Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{2x^2-1}{2+x}$$

Soluzione:

La funzione è definita per tutte le x tali per cui $2+x \neq 0$ quindi

$$X = dom(f) = (-\infty,-2) \cup (-2,+\infty)$$

Il dominio non è simmetrico rispetto all'origine quindi ha non senso indagare se la funzione presenti simmetrie. Non ve ne possono essere.

Studiamo il segno della funzione iniziando con lo studiare separatamente numeratore e denominatore:

$$\begin{array}{ccccc} N>0 & \Longleftrightarrow & 2x^2-1<0 & \Longleftrightarrow & -\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}} \\ D>0 & \Longleftrightarrow & 2+x>0 & \Longleftrightarrow & x>-2 \end{array}$$

da cui si conclude che

$$\begin{array}{ccc} f>0 & \Longleftrightarrow & x\in\left(-2,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right) \\ f<0 & \Longleftrightarrow & x\in(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{array}$$

Peraltro $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$ e $f(0)=-\frac{1}{2}$.

La funzione è continua essendo rapporto di funzioni continue. I limiti interessanti risultano essere:

$$\begin{array}{rcccc} 1) & \lim_{x\to\mp\infty}\frac{2x^2-1}{2+x}= & \lim_{x\to\mp\infty}\frac{2x^2}{x}=\mp\infty & & \\ 2) & \lim_{x\to 2^{\mp}}\frac{2x^2-1}{2+x}= & \mp\infty & & \\ 3) & \lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x}= & \lim_{x\to\mp\infty}\frac{2x^2-1}{2x+x^2}= & \lim_{x\to\mp\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2 & \\ 4) & \lim_{x\to\mp\infty}f(x)-2x= & \lim_{x\to\mp\infty}\frac{2x^2-1-4x-2x^2}{2+x} & = & \lim_{x\to\mp\infty}\frac{-4x}{x}=-4 \end{array}$$

Dal punto 1 si evince che la funzione è illimitata e non ammette asintoti orizzontali.

Dal punto 2 oltre a confermare l'illimitatezza di f si individua un asintoto verticale di equazione $x=-2$.

Dai punti 3 e 4 si individuano gli asintoti obliqui sinistro e destro di equazione $y=2x-4$.

f risulta essere derivabile sul proprio dominio essendo rapporto di funzioni derivabili. Il calcolo della derivata prima conduce a:

$$f'(x)=\frac{4x(x+2)-1(2x^2-1)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+8x+1}{(x+2)^2}$$

avente stesso dominio di f.

Il segno di f' dipende dal segno di $2x^2+8x+1$ essendo il denominatore sempre positivo. Studiarne il segno è immediato e conduce alle seguenti conclusioni:

$$\begin{array}{ccc} f'>0 & \Longleftrightarrow & x\in\left(-\infty,-\sqrt{\frac{7}{2}}-2\right)\cup\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-2,+\infty\right) \\ f'<0 & \Longleftrightarrow & x\in\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}-2,-2\right)\cup\left(-2,\sqrt{\frac{7}{2}}-2\right) \end{array}$$

Per cui f non è monotona e presenta le seguenti caratteristiche:

- f è strettamente crescente sull'intervallo $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{2}} - 2\right)$, strettamente decrescente sull'intervallo $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}} - 2, -2\right)$ presentando nel punto $x = -\sqrt{\frac{7}{2}} - 2$ un punto di massimo locale forte

- f è strettamente decrescente sull'intervallo $\left(-2, \sqrt{\frac{7}{2}} - 2\right)$ e strettamente crescente sull'intervallo $\left(\sqrt{\frac{7}{2}} - 2, +\infty\right)$ presentando nel punto $x = \sqrt{\frac{7}{2}} - 2$ un punto di minimo locale forte.

La derivata prima risulta essere essa stessa derivabile sul proprio dominio per cui f è derivabile due volte su X con derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{(4x+8)(x+2)^2 - (2x^2+8x+1)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{14}{(x+2)^3}$$

Il segno è immediato:

$$\begin{array}{lcll} f'' > 0 & \iff & x \in (-\infty, -2) & \text{tratto di stretta concavità di } f \\ f' < 0 & \iff & x \in (-2, +\infty) & \text{tratto di stretta convessità di } f \end{array}$$

Aiutandosi con gli asintoti e le intersezioni degli assi non è neppure necessario il noioso calcolo del valore del minimo e del massimo per tracciare un grafico qualitativo della funzione.