Università del Piemonte Orientale "A. Avogadro" - Dip. SEI

Soluzione della prova del 19 febbraio 2014 del corso di

Metodi Matematici 1 (E0252)

Metodi Quantitativi 1

Esercizio 1. Calcolare la derivata seconda della funzione $f(x) = \log(1 - 3x^2)$.

Soluzione. Si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{1-3x^2} \cdot 2(-3x) = -\frac{6x}{1-3x^2}$$

e quindi:

$$f''(x) = -6\frac{1-3x^2 - x(-6x)}{(1-3x^2)^2} = -\frac{6(3x^2+1)}{(1-3x^2)^2}.$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{5x}-1}.$$

Soluzione. Il limite presenta una forma di indecisione 0/0. Si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{5x}-1} = \frac{1}{5} \lim_{x\to 0} \frac{5x}{e^{5x}-1} = \frac{1}{5} \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{5x}} = \frac{1}{5}.$$

Esercizio 3. Calcolare la controimmagine dell'insieme $[1,2]$ tramite la funzione $f(x) = \sqrt{1-x} - 2$.

Soluzione. La controimmagine richiesta $f^{-1}([1,2])$ è l'insieme dei numeri reali che appartengono al dominio di f e tali che $1 \leq f(x) \leq 2$, cioè tali che

$$1 \leq \sqrt{1-x} - 2 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{1-x} \geq 3 \\ \sqrt{1-x} \leq 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in (-\infty, -8] \\ x \in [-15, 1] \end{cases}$$

e quindi

$$f^{-1}([1,2]) = [-15, -8].$$

Esercizio 4. **(a)** Verificare che la funzione

$$f(x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.

(b) Determinare eventuali estremanti di f.

Soluzione. **(a)** La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x \leq 3.$$

Poiché il dominio è un intervallo chiuso e limitato e la funzione è continua (perché composizione e differenza di funzioni continue) per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluto.

(b) Per ogni $x \in (1,3)$ la funzione è derivabile, con derivata prima

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

negativa. Dal test di monotonia segue che f è strettamente decrescente. Quindi $x = 1$ è punto di massimo assoluto, con $f(1) = \sqrt{2}$, mentre $x = 3$ è punto di minimo assoluto, con $f(3) = -\sqrt{2}$.

Esercizio 5. Studiare la seguente funzione, disegnandone un grafico qualitativo

$$f(x) = \frac{x-2}{3x^2}.$$

Soluzione. Dominio naturale. La funzione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \neq 0$ cioè $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}_0$.
Eventuali simmetrie. Il dominio di f è simmetrico rispetto all'origine; poiché

$$f(-x) = \frac{-x-2}{3(-x)^2} = -\frac{x+2}{3x^2} \neq \pm f(x)$$

la funzione f non è né pari né dispari.
Segno ed intersezioni. $f(x) > 0$ se e solo se

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3x^2} > 0 \\ x \in \mathbb{R}_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2 > 0 \\ x \in \mathbb{R}_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x > 2.$$

Dunque:

- f è positiva per $x \in (2, +\infty)$;
- f è negativa per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$;
- f è nulla per $x = 2$.

Limiti e continuità. La funzione f è continua, perché quoziente di funzioni continue. Inoltre:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{3x} = 0^{\pm}; \qquad \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{x-2}{3x^2} = -\infty.$$

La funzione è inferiormente illimitata, quindi non ammette minimo assoluto.
Asintoti. La funzione f ha asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to \pm\infty$ e asintoto verticale di equazione $x = 0$. Non ci sono asintoti obliqui.
Derivata prima.
Esistenza. La funzione f è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}_0$, in quanto quoziente di funzioni derivabili.
Calcolo. Si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot x^2 - (x-2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{4-x}{3x^3}.$$

Segno. Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}_0 \\ \frac{4-x}{3x^3} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0, 4).$$

Quindi:

- $f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (0, 4)$;
- $f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$.

Monotonia ed estremanti. Dal test di monotonia si conclude che:

- f non è monotòna;
- f è strettamente crescente sull'intervallo $(0, 4)$;
- f è strettamente decrescente sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(4, +\infty)$.

Il punto $x = 4$ è di massimo relativo stretto. Da questi risultati e da quanto ottenuto precedentemente, si deduce che 4 è punto di massimo assoluto.

Derivata seconda.
Esistenza. La funzione f' è derivabile in $\mathbb{R}_0$, dunque f è derivabile due volte in tale insieme.
Calcolo. Si ha:

$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-x^3 - (4-x) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2\,(x-6)}{3x^4}.$$

Segno. La derivata seconda è positiva se e solo se $x > 6$. Dunque:

- $f''\,(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (6, +\infty);$
- $f''\,(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, 6)\,;$
- $f''\,(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6.$

Convessità e punti di flesso. Dal test di convessità segue:

- f non è convessa, non è concava;
- f è strettamente convessa sull'intervallo $(6, +\infty)$;
- f è strettamente concava sugli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, 6)$.

Il punto $x = 6$ è punto di flesso a tangente obliqua.

Grafico. Riportiamo un grafico qualitativo di f.