Rudimenti di topologia sugli spazi normati

20 settembre 2011

In queste dispense introdurremo il concetto di topologia sugli spazi normati, con particolare interesse per gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$. Questa introduzione è particolarmente utile per definire i limiti e la continuità per funzioni a più variabili. Con il simbolo $\mathbb{R}^+$ denoteremo l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

1 Spazi normati

Definizione 1.1 *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Una norma su X è una funzione*

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

tale che

1. $\|x\| = 0$ *se e solo se* $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e per ogni* $x \in X$.
3. ***(Disuguaglianza triangolare)*** $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *per ogni* $x, y \in X$.

Definizione 1.2 *La coppia $(X, \|\cdot\|)$, dove X è uno spazio vettoriale X su $\mathbb{R}$ e $\|\cdot\|$ è una norma su X, si dice uno spazio normato.*

Esempio 1.3 *La funzione valore assoluto su $\mathbb{R}$ è una norma su $\mathbb{R}$; di conseguenza la coppia $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è uno spazio normato.*

Proposizione 1.4 *La funzione*

$$\begin{array}{cccc} \|\cdot\| : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \end{array} \tag{1.1}$$

è una norma su $\mathbb{R}^n$. Tale norma si dice norma Euclidea.

Dimostrazione. Chiaramente si ha che $\|(x_1,\dots,x_n)\| \geq 0$ per ogni $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dimostriamo che le tre richieste della definizione di norma valgono.

1. Si noti che $\|(0,\dots,0)\| = 0$. Supponiamo ora che $\|(x_1,\dots,x_n)\| = 0$. Di conseguenza $x_1^2+\cdots+x_n^2 = 0$ e quindi $x_i = 0$ per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$.

2. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Vale
$$\begin{aligned} \|\lambda(x_1,\dots,x_n)\| &= \|(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2+\cdots+(\lambda x_n)^2} \\ &= |\lambda|\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} = |\lambda|\|(x_1,\dots,x_n)\|. \end{aligned}$$

3. Si noti che
$$\|(x_1,\dots,x_n)\| = ((x_1,\dots,x_n)\cdot(x_1,\dots,x_n))^{\frac{1}{2}}$$
per ogni $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, dove il simbolo $\cdot$ denota il prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$. Per una definizione di prodotto scalare si veda ad esempio [1, Pagg. 110 e seguenti]. Per ogni $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ vale la seguente disuguaglianza di Schwarz
$$|(x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n)| \leq \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\cdots+x_n^2}.$$
Pertanto, se $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, allora
$$\begin{aligned} & \|(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\|^2 = \|(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\|^2 \\ = & (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\cdot(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \\ = & (x_1,\dots,x_n)\cdot(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)\cdot(y_1,\dots,y_n) \\ & +2(x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n) \\ = & \|(x_1,\dots,x_n)\|^2+\|(y_1,\dots,y_n)\|^2+2(x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n) \\ \leq & \|(x_1,\dots,x_n)\|^2+\|(y_1,\dots,y_n)\|^2 \\ & +2\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\cdots+x_n^2} \\ = & (\|(x_1,\dots,x_n)\|+\|(y_1,\dots,y_n)\|)^2. \end{aligned}$$

La dimostrazione è conclusa. $\square$

Esercizio 1 *Dimostrare che la funzione*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_\infty : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} \end{array} \tag{1.2}$$

è una norma su $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 2 *Dimostrare che la funzione*

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_1 : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & |x_1|+\dots+|x_n| \end{array} \tag{1.3}$$

è una norma su $\mathbb{R}^n$.

2 Topologia

In questa sezione la coppia $(X,\|\cdot\|)$ denoterà uno spazio metrico.

Definizione 2.1 *Dati* $x_o \in X$ *e* $r > 0$*, l'insieme*

$$B(x_o,r) = B_r(x_o) = \{x \in X : \|x - x_o\| < r\} \tag{2.4}$$

si dice palla (o boccia) di X *centrata in* x_o *e raggio* r.

Esempio 2.2 *Se* $X = \mathbb{R}$ *e* $\|\cdot\|$ *è la norma Euclidea, allora* $B(x_o,r)$ *coincide con l'intervallo* $]x_o - r, x_o + r[$.

Esempio 2.3 *Se* $X = \mathbb{R}^2$ *e* $\|\cdot\|$ *è la norma Euclidea, allora*

$$B((x_o,y_o),r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 < r^2\right\}.$$

Per una rappresentazione grafica si veda la Figura 1.

Esempio 2.4 *Se* $X = \mathbb{R}^2$ *e* $\|\cdot\|_\infty$ *è la norma definita in (1.2), allora*

$$B((x_o,y_o),r) =]x_o - r, x_o + r[\times]y_o - r, y_o + r[.$$

Per una rappresentazione grafica si veda la Figura 2.

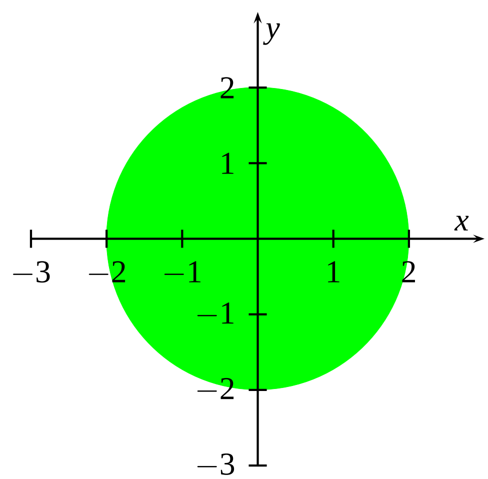

Figura 1: Rappresentazione grafica della palla centrata in $(0,0)$ e raggio 2 rispetto alla norma Euclidea.

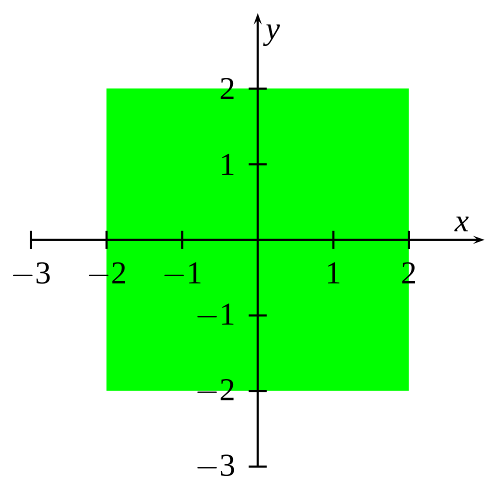

Figura 2: Rappresentazione grafica della palla centrata in $(0,0)$ e raggio 2 rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$.

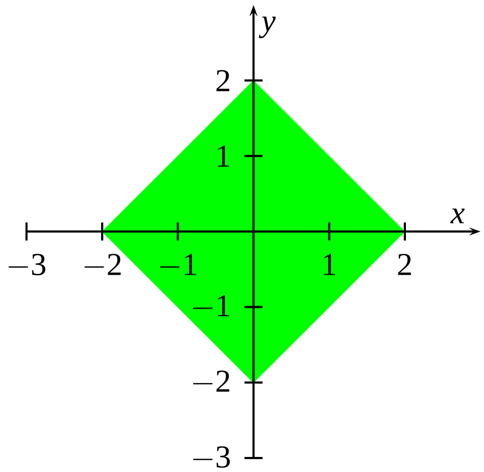

Figura 3: Rappresentazione grafica della palla centrata in $(0,0)$ e raggio 2 rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$.

Esempio 2.5 *Se $X = \mathbb{R}^2$ e $\|\cdot\|_1$ è la norma definita in (1.3), allora*

$$B\left((x_o, y_o), r\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_o| + |y - y_o| < r\right\}.$$

Per una rappresentazione grafica si veda la Figura 3.

Definizione 2.6 *Sia $x_o \in X$. Un sottoinsieme U di X si dice un <u>intorno</u> di x_o se esiste $r > 0$ tale che $B(x_o, r) \subseteq U$.*

Definizione 2.7 *Un sottoinsieme A di X si dice <u>aperto</u> se per ogni $x \in A$ esiste $r = r_x > 0$ tale che $B(x,r) \subseteq A$.*
Un sottoinsieme C di X si dice <u>chiuso</u> se $X \setminus C$ è aperto.

Esercizio 3 *Dimostrare che un sottoinsieme A di X è aperto se e solo se A è un intorno di ogni suo punto.*

Definizione 2.8 *Sia $B \subseteq X$. Un punto $x_o \in B$ si dice <u>interno</u> a B se B è un intorno di x_o. L'insieme*

$$\mathring{B} = \{x \in B : x \text{ interno a } B\}$$

si dice l'<u>interno</u> di B.

Definizione 2.9 *Sia $B \subseteq X$. Un punto $x_o \in X$ si dice di chiusura o di aderenza per B se, per ogni $r > 0$, $B \cap B(x_o, r) \neq \emptyset$. L'insieme*

$$\overline{B} = \{x \in X : x \text{ di chiusura per } B\}$$

si dice la chiusura di B.

Definizione 2.10 *Sia $B \subseteq X$. Un punto $x_o \in X$ si dice di accumulazione per B se per ogni $r > 0$ esiste y tale che $y \in B \cap B(x_o, r)$.*

Definizione 2.11 *Sia $B \subseteq X$. Un punto $x_o \in B$ si dice isolato se x_o non è di accumulazione per B.*

Definizione 2.12 *Sia $B \subseteq X$. Un punto $x_o \in X$ si dice di frontiera per B se x_o è di chiusura sia per B che per $X \setminus B$. L'insieme*

$$\partial B = \{x \in X : x \text{ di frontiera per } B\}$$

si dice la frontiera di B.

Esercizio 4 *Sia A_α una famiglia di insiemi aperti di X. Provare che $\cup_\alpha A_\alpha$ è un insieme aperto.*

Esercizio 5 *Siano A_1 e A_2 insiemi aperti di X. Provare che $A_1 \cap A_2$ è un insieme aperto.*

Esercizio 6 *Sia $B \subseteq X$. Provare che*

1. *$\mathring{B}$ è un insieme aperto;*
2. *$\mathring{B} \subseteq B$;*
3. *$\mathring{B}$ è il più grande insieme aperto contenuto in B.*

Esercizio 7 *Sia $X = \mathbb{R}$ dotato della norma Euclidea. Si consideri, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'insieme aperto $A_n = \left]0, 1 + \frac{1}{n}\right[$. Provare che $\cap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} A_n$ non è un insieme aperto.*

Esercizio 8 *Sia C_α una famiglia di insiemi chiusi di X. Provare che $\cap_\alpha C_\alpha$ è un insieme chiuso.*

Esercizio 9 *Siano C_1 e C_2 insiemi chiusi di X. Provare che $C_1 \cup C_2$ è un insieme chiuso.*

Esercizio 10 *Sia $B \subseteq X$. Provare che*

1. *$\overline{B}$ è un insieme chiuso;*
2. *$B \subseteq \overline{B}$;*
3. *$\overline{B}$ è il più piccolo insieme chiuso contenente B.*

Esercizio 11 *Sia $B \subseteq X$. Provare che $x \in B$ è isolato se e solo se esiste $r > 0$ tale che $B(x,r) \cap B = \{x\}$.*

Esercizio 12 *Sia $B \subseteq X$. Provare che $\partial B = \overline{B} \cap \overline{X \setminus B}$.*

Esercizio 13 *Sia $X = \mathbb{R}$ dotato della norma Euclidea e sia*

$$I = [0,1] \cup [2,3[\cup]4,5[\cup \{6\} \cup ([7,8] \cap \mathbb{Q})\,.$$

Determinare gli insiemi ∂I, $\overline{I}$, $\mathring{I}$, $\mathring{\overline{I}}$, $\overline{\mathring{I}}$, $\overline{\mathring{\overline{I}}}$, $\mathring{\overline{\mathring{I}}}$.

Riferimenti bibliografici

[1] V. Barutello, M. Conti, D. L. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, Analisi Matematica, Volume 2, Apogeo, Milano, 2008.

[2] G. De Marco, Analisi Due/1, Decibel Zanichelli, Padova, 1992.

[3] G. Prodi, Analisi Matematica, Bollati Boringhieri, Torino, 1970.

[4] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, third edition, McGraw-Hill, 1964.