Misura e integrazione in più variabili

15 novembre 2011

In queste note si vuole introdurre la nozione di insieme misurabile in $\mathbb{R}^n$ e di integrale in più variabili secondo Riemann.

1 Rettangoli e plurirettangoli in $\mathbb{R}^n$

Iniziamo con la definizione di rettangolo in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1 *Un sottoinsieme R di $\mathbb{R}^n$ si dice un rettangolo se è prodotto cartesiano di n intervalli. In tal caso si definisce misura di R (e si indicherà con mis(R) o $|R|$) il prodotto delle lunghezze degli intervalli che costituiscono il rettangolo R.*

Osservazione 1 *Si noti che l'insieme vuoto $\emptyset$ e l'insieme contenente un solo punto sono rettangoli di $\mathbb{R}^n$.*

Esempio 1.2 *I seguenti insiemi sono dei rettangoli in $\mathbb{R}^2$.*

1. $R = [1,2]\times]3,6[$. *In questo caso mis(R)* $= 3$.
2. $R =]1,2[\times[3,7]$. *In questo caso mis(R)* $= 4$.
3. $R = \{1\} \times [0,1]$. *In questo caso mis(R)* $= 0$.

Lemma 1.3 *Siano R ed S due rettangoli di $\mathbb{R}^n$. Allora $R \cap S$ è un rettangolo di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Per ipotesi esistono n intervalli reali $I_1, \ldots, I_n$ tali che $R = I_1 \times \cdots \times I_n$. Inoltre esistono n intervalli reali $J_1, \ldots, J_n$ tali che $S = J_1 \times \cdots \times J_n$. Si vede facilmente che

$$R \cap S = (I_1 \cap J_1) \times \cdots \times (I_n \cap J_n) \, .$$

Ora l'intersezione di due intervalli reali è un intervallo reale, se si considera l'insieme vuoto come un intervallo. Pertanto $R \cap S$ è un intervallo. $\square$

Definizione 1.4 *Due rettangoli A e B di $\mathbb{R}^n$ si dicono <u>essenzialmente</u> disgiunti se*

$$\mathit{int}\, A \cap \mathit{int}\, B = \emptyset,$$

dove int *denota la parte interna di un insieme.*

Definizione 1.5 *Un sottoinsieme P di $\mathbb{R}^n$ si dice un <u>plurirettangolo</u> se è unione finita di rettangoli di $\mathbb{R}^n$.*

Denotiamo con $\mathcal{P}$ l'insieme dei plurirettangoli di $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 2 *Si noti che un plurirettangolo di $\mathbb{R}^n$ si può sempre scrivere come unione finita di rettangoli a due a due essenzialmente disgiunti.*

Proposizione 1.6 *Sia P un plurirettangolo di $\mathbb{R}^n$ e sia $P = \cup_{i=1}^{m_1} R_i = \cup_{j=1}^{m_2} S_j$ con R_i rettangoli a due a due essenzialmente disgiunti e S_j rettangoli a due a due essenzialmente disgiunti. Allora*

$$\sum_{i=1}^{m_1} |R_i| = \sum_{j=1}^{m_2} |S_j|. \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Si considerino, per ogni $i \in \{1, \ldots, m_1\}$ e $j \in \{1, \ldots, m_2\}$, gli insiemi $T_{i,j} = R_i \cap S_j$, vedi Figura 1. Per il Lemma 1.3, gli insiemi $T_{i,j}$ sono tutti rettangoli, alcuni dei quali potrebbero essere l'insieme vuoto. Dato che gli S_j sono a due a due essenzialmente disgiunti si deduce che, per ogni $i \in \{1, \ldots, m_1\}$,

$$|R_i| = \sum_{j=1}^{m_2} |R_i \cap S_j| = \sum_{j=1}^{m_2} |T_{i,j}|.$$

Dato che gli R_i sono a due a due essenzialmente disgiunti si deduce che, per ogni $j \in \{1, \ldots, m_2\}$,

$$|S_j| = \sum_{i=1}^{m_1} |R_i \cap S_j| = \sum_{i=1}^{m_1} |T_{i,j}|.$$

Pertanto

$$\sum_{i=1}^{m_1} |R_i| = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} |T_{i,j}| = \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{i=1}^{m_1} |T_{i,j}| = \sum_{j=1}^{m_2} |S_j|,$$

da cui la conclusione. □

Grazie alla precedente proposizione, è possibile definire la misura di un plurirettangolo nel modo seguente.

Definizione 1.7 *Sia P un plurirettangolo di $\mathbb{R}^n$ e sia $P = \cup_{j=1}^m R_j$ con R_j rettangoli a due a due essenzialmente disgiunti. Allora si definisce la misura di P come*

$$mis(P) = |P| := \sum_{j=1}^{m} |R_j|.$$

La Proposizione 1.6 implica che la Definizione 1.7 è una buona definizione, cioè che la misura di un plurirettangolo è indipendente dalla scelta dei rettangoli costituenti, a patto che siano a due a due essenzialmenti disgiunti. Enunciamo ora alcuni risultati generali sui plurirettangoli di $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 1.8 *Siano A e B plurirettangoli di $\mathbb{R}^n$. Allora $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$ sono plurirettangoli. Inoltre*

$$|A \cup B| \leq |A| + |B|.$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo che $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$ sono plurirettangoli. Dato che A e B sono plurirettangoli, allora

$$A = R_1 \cup \cdots \cup R_n \qquad \text{e} \qquad B = S_1 \cup \cdots \cup S_m,$$

dove R_i e S_j sono rettangoli. Si vede facilmente che

$$\begin{aligned} A \cup B &= R_1 \cup \cdots \cup R_n \cup S_1 \cup \cdots \cup S_m, \\ A \cap B &= \bigcup\nolimits_{i=1,\ldots n,\, j=1,\ldots,m} (R_i \cap S_j)\,, \end{aligned}$$

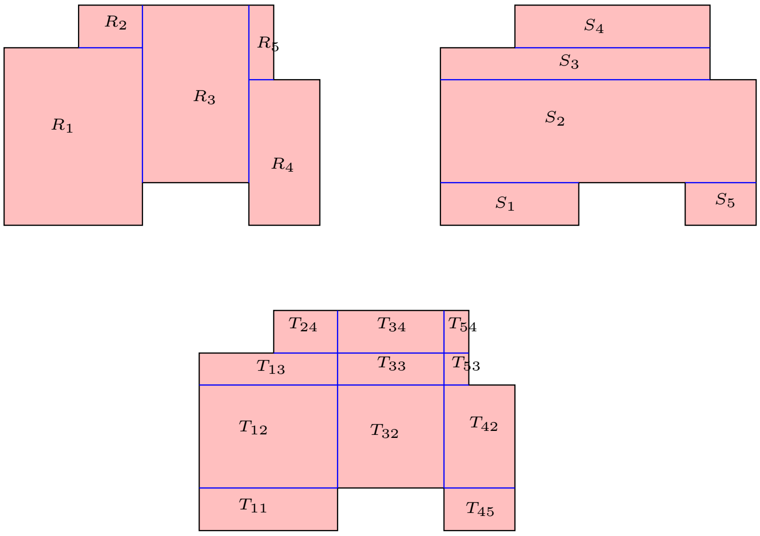

Figura 1: Possibili suddivisioni di un plurirettangolo in rettangoli.

e quindi, grazie al Lemma 1.3, si conclude che $A \cap B$ e $A \cup B$ sono plurirettangoli. Infine si noti che, se R è un rettangolo, allora il suo complementare $\mathbb{R}^n \setminus R$ è un plurirettangolo. Inoltre

$$A \setminus B = A \cap (\mathbb{R} \setminus B)$$

e quindi si conclude che $A \setminus B$ è un plurirettangolo. $\square$

Proposizione 1.9 *Siano A e B plurirettangoli di $\mathbb{R}^n$ tali che $A \subseteq B$. Allora $|A| \leq |B|$.*

Dimostrazione. Sia

$$A = R_1 \cup \cdots \cup R_n$$

una decomposizione di A mediante rettangoli a due a due essenzialmente disgiunti. Per la Proposizione 1.8, $A \setminus B$ è un plurirettangolo e pertanto sia

$$A \setminus B = S_1 \cup \cdots \cup S_m$$

una sua decomposizione mediante rettangoli a due a due essenzialmente disgiunti. Pertanto

$$|A| = |R_1| + \cdots + |R_n| \leq |R_1| + \cdots + |R_n| + |S_1| + \cdots + |S_m| = |B|,$$

in quanto

$$B = A \cup (B \setminus A) = R_1 \cup \cdots \cup R_n \cup S_1 \cup \cdots \cup S_m$$

e i rettangoli della decomposizione di B sono a due a due essenzialmente disgiunti. $\square$

Introduciamo ora la nozione di insieme misurabile.

Definizione 1.10 *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ limitato. A si dice* <u>*misurabile*</u> *se*

$$\sup_{P' \in \mathcal{P}, P' \subseteq A} |P'| = \inf_{P'' \in \mathcal{P}, A \subseteq P''} |P''|. \tag{1.2}$$

In tal caso si pone

$$|A| = \sup_{P' \in \mathcal{P}, P' \subseteq A} |P'| = \inf_{P'' \in \mathcal{P}, A \subseteq P''} |P''|. \tag{1.3}$$

Vale il seguente lemma.

Lemma 1.11 *Sia A un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$. A è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due plurirettangoli $P', P'' \in \mathcal{P}$ tali che $P' \subseteq A \subseteq P''$ e $|P''| - |P'| \leq \varepsilon$.*

Dimostrazione. Supponiamo A sia misurabile e fissiamo $\varepsilon > 0$. Dato che $|A| = \sup_{P' \in \mathcal{P}, P' \subseteq A} |P'| < +\infty$ esiste $P' \subseteq \mathcal{P}$ tale che

$$|A| - \frac{\varepsilon}{2} < |P'|.$$

Analogamente, dato che $|A| = \inf_{P'' \in \mathcal{P}, A \subseteq P''} |P''| > -\infty$ esiste $P'' \subseteq \mathcal{P}$ tale che

$$|A| + \frac{\varepsilon}{2} > |P''|.$$

Allora

$$|P''| - |P'| < |A| + \frac{\varepsilon}{2} - |A| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

e quindi vale la condizione del lemma.

Supponiamo invece che valga la condizione: per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $P', P'' \in \mathcal{P}$ tali che $P' \subseteq A \subseteq P''$ e $|P''| - |P'| \leq \varepsilon$. Si vede facilmente che

$$\sup_{P' \in \mathcal{P}, P' \subseteq A} |P'| = \inf_{P'' \in \mathcal{P}, A \subseteq P''} |P''|$$

e quindi A è misurabile e il lemma dimostrato. $\square$

Valgono le seguenti proprietà per gli insiemi misurabili.

Proposizione 1.12 *Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ misurabili. Allora*

$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|. \tag{1.4}$$

Inoltre se $A \subseteq B$, allora $|A| \leq |B|$.

2 Funzioni integrabili secondo Riemann

In questa sezione introduciamo la nozione di integrabilità per funzioni di più variabili. Iniziamo definendo le funzioni a scala su $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.1 *Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice semplice (o a scala o costante a tratti) se esistono $m \in \mathbb{N}$, dei rettangoli $R_1, \dots, R_m$ a due a due essenzialmente disgiunti e delle costanti $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ tali che*

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \textit{se } x \in \operatorname{Int} R_1, \\ c_2 & \textit{se } x \in \operatorname{Int} R_2, \\ \vdots & \qquad \vdots \\ c_m & \textit{se } x \in \operatorname{Int} R_m, \\ 0 & \textit{se } x \notin (R_1 \cup \dots \cup R_m)\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

Denoteremo con $\mathcal{S}$ l'insieme di tutte le funzioni a scala in $\mathbb{R}^n$. Per funzioni a scala si può dare la seguente intuitiva definizione di integrale.

Definizione 2.2 *Sia f una funzione a scala. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \sum_{j=1}^{m} c_j |R_j|. \tag{2.2}$$

Provare che la Definizione 2.2 è una buona definizione, nel senso che il valore dell'integrale non dipende dalla rappresentazione (2.1) della funzione.

Lemma 2.3 *Siano f e g due funzioni a scala tali che $f \leq g$. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx.$$

La dimostrazione è facile una volta che si osserva il fatto seguente. Date due funzioni a scala, è possibile trovare un insieme finito di rettangoli a due a due essenzialmente disgiunti in modo che sia f che g sono costanti su ciascun rettangolo.

Definizione 2.4 *Sia K un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia f una funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ limitata e tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Si dice che f è integrabile secondo Riemann se*

$$\sup_{g \in \mathcal{S}, g \leq f} \int_{\mathbb{R}^n} g = \inf_{h \in \mathcal{S}, h \geq f} \int_{\mathbb{R}^n} h. \tag{2.3}$$

In tal casi si pone

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \sup_{g \in \mathcal{S}, g \leq f} \int_{\mathbb{R}^n} g. \tag{2.4}$$

Osservazione 3 *Una funzione definita in $\mathbb{R}^n$ che si annulla nel complementare di un insieme limitato si dice a supporto limitato o compatto.*

Lemma 2.5 *Sia f una funzione limitata a supporto compatto. f è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni a scala g e h tali che $g \leq f \leq h$ e*

$$\int_{\mathbb{R}^n} h - \int_{\mathbb{R}^n} g \leq \varepsilon. \tag{2.5}$$

La dimostrazione è analoga a quella del Lemma 1.11. Enunciamo ora senza dimostrazione alcune proprietà delle funzioni integrabili.

1. Se f è integrabile, allora λf è integrabile per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda f = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f. \tag{2.6}$$

2. Se f_1 e f_2 sono integrabili, allora $f_1 + f_2$ è integrabile e vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f_1 + f_2) = \int_{\mathbb{R}^n} f_1 + \int_{\mathbb{R}^n} f_2. \tag{2.7}$$

3. Se f_1 e f_2 sono integrabili e $f_1 \leq f_2$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 \leq \int_{\mathbb{R}^n} f_2. \tag{2.8}$$

4. Se f è integrabile, allora f^+, f^- e $|f|$ sono integrabili. Inoltre

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx. \tag{2.9}$$

Dimostriamo invece il seguente teorema.

Teorema 2.6 *Siano f_1 e f_2 due funzioni definite in $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$ limitate e a supporto compatto. Sia*

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) \neq f_2(x)\} \tag{2.10}$$

e supponiamo che D sia misurabile e $|D| = 0$. Allora f_1 è integrabile se e solo se f_2 è integrabile. In tal caso si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 = \int_{\mathbb{R}^n} f_2. \tag{2.11}$$

Dimostrazione. Supponiamo che f_2 sia integrabile. Possiamo scrivere $f_1 = f_2 + (f_1 - f_2)$. Se dimostriamo che $f_1 - f_2$ è integrabile, allora otteniamo che f_1 è integrabile per (2.7). Per ipotesi (limitatezza di f_1 e f_2) esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leq M$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Dato che $|D| = 0$ esiste un plurirettangolo P tale che $D \subseteq P$ e $|P| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Definiamo ora le seguenti funzioni a scala [1]

$$g(x) = \begin{cases} -M, & \text{se } x \in \operatorname{Int} P, \\ 0, & \text{se } x \notin \operatorname{Int} P, \end{cases}$$

e

$$h(x) = \begin{cases} M, & \text{se } x \in \operatorname{Int} P, \\ 0, & \text{se } x \notin \operatorname{Int} P. \end{cases}$$

[1] verificare che sono funzioni a scala.

Inoltre per costruzione risulta che

$$g(x) \leq f_1(x) - f_2(x) \leq h(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ [2] e

$$\int_{\mathbb{R}^n} h - \int_{\mathbb{R}^n} g = 2M|P| < \varepsilon.$$

Allora, per il Lemma 2.5, segue che $f_1 - f_2$ è integrabile e quindi f_1 integrabile. Vale inoltre

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \int_{\mathbb{R}^n} g \leq \int_{\mathbb{R}^n} (f_1 - f_2) \leq \int_{\mathbb{R}^n} h < \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui segue, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, che

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f_1 - f_2) = 0$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1 = \int_{\mathbb{R}^n} f_2.$$

Il caso di f_1 integrabile è analogo. □

Supponiamo ora di avere una funzione f definita su un insieme misurabile A di $\mathbb{R}^n$ a valori reali. Possiamo definire un'estensione di f nel modo seguente:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Diamo ora la definizione di integrabilità di una funzione definita su un insieme misurabile di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.7 *Una funzione f si dice integrabile su A se la sua estensione $\tilde{f}$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$. In tal caso*

$$\int_A f := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}. \tag{2.13}$$

[2] basta distinguere i casi $x \in D$ e $x \notin D$.

Proposizione 2.8 *Siano A e B insiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ e $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è integrabile su $A \cup B$ se e solo se f è integrabile su A e su B.*

Se vale $|A \cap B| = 0$, allora

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f. \tag{2.14}$$

Valgono anche i seguenti risultati importanti, di cui non diamo una dimostrazione.

Teorema 2.9 *Siano A un insieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Se l'insieme dei punti di discontinuità di f ha misura nulla, allora f è integrabile.*

Teorema 2.10 *Sia $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Supponiamo che per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $x \mapsto f(x, y)$ sia integrabile in $\mathbb{R}^m$. Allora la funzione*

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y)dx \tag{2.15}$$

è integrabile su $\mathbb{R}^n$ e vale

$$\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x, y)dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y)dx \right) dy. \tag{2.16}$$

Osservazione 4 *Il ruolo di x e di y nel Teorema 2.10 è simmetrico*

3 Cambiamento di variabile per integrali multipli

In questa sezione enunciamo (senza dimostrazione) il teorema di cambio di variabili per integrali multipli e diamo alcuni esempi importanti.

Teorema 3.1 *Siano A e B due aperti di $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : B \to A$ un diffeomorfismo di classe C^1. Sia f una funzione integrabile su A. Allora la funzione $f \circ \varphi$ è integrabile su $\varphi^{-1}(A)$ e*

$$\int_A f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(A)} (f \circ \varphi)(y) |\det \varphi'(y)| dy, \tag{3.1}$$

dove $\varphi'(y)$ indica la matrice Jacobiana di φ.

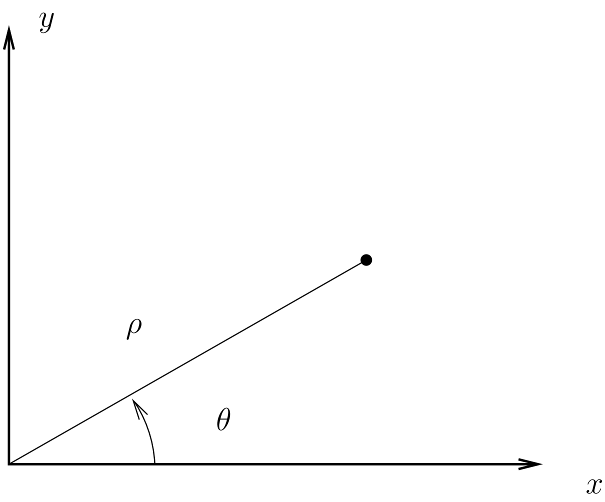

Figura 2: Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$.

Vediamo ora alcuni esempi significativi.

Esempio 3.2 ***(Coordinate polari in*** $\mathbb{R}^2$***.)*** *Le coordinate polari in* $\mathbb{R}^2$ *sono date da*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \tag{3.2}$$

dove ρ *indica la distanza dall'origine di un generico punto di* $\mathbb{R}^2$ *e* θ *è l'angolo formato dal semiasse delle* x *positive e dal segmento congiungente l'origine e il generico punto del piano; vedi Figura 2.*

La matrice Jacobiana del cambio di variabile è data da

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

e quindi il suo determinante in valore assoluto vale ρ*.*

Esempio 3.3 ***(Coordinate polari in*** $\mathbb{R}^3$***.)*** *Le coordinate polari in* $\mathbb{R}^3$ *sono date da*

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi, \end{cases} \tag{3.4}$$

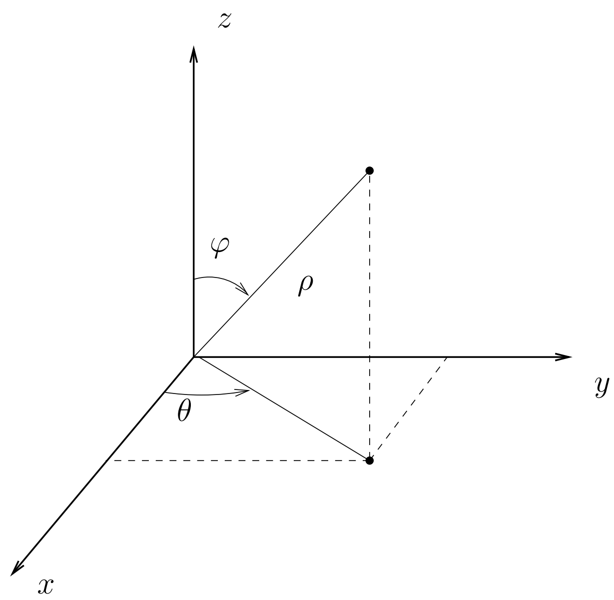

Figura 3: Coordinate polari in $\mathbb{R}^3$.

dove ρ indica la distanza dall'origine di un generico punto di $\mathbb{R}^3$ e $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ sono angoli; vedi Figura 3.

La matrice Jacobiana del cambio di variabile è data da

$$\begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

e quindi il suo determinante in valore assoluto vale $\rho^2 \sin\varphi$.

Esempio 3.4 ***(Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$.)*** *Le coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$ sono date da*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \\ z = z, \end{cases} \tag{3.6}$$

dove ρ è una lunghezza e $\theta \in [0, 2\pi]$ un angolo; vedi Figura 4.

La matrice Jacobiana del cambio di variabile è data da

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

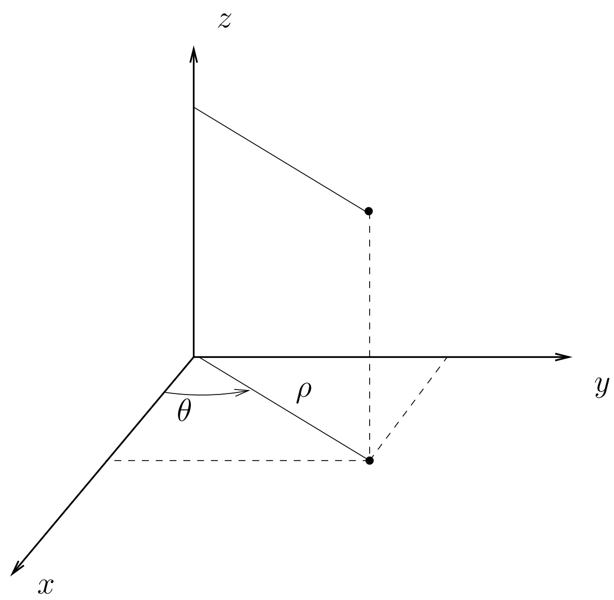

Figura 4: Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$.

e quindi il suo determinante in valore assoluto vale ρ.

4 Esercizi

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale*

$$\int_A x^2 y dx dy$$

dove $A = [0,1] \times [-2,2]$.

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale*

$$\int_A y \, dx \, dy$$

dove

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, 1-y < x^2 < 4-y\right\}.$$

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale*

$$\int_A 1\, dx\, dy\, dz$$

dove

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |y| + |z| < 2, |x| < 1, |y| < 1\right\}.$$

Esercizio 4 *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri l'insieme*

$$A_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^{\frac{2}{2n-1}} + y^{\frac{2}{2n-1}} < 2^{\frac{2}{2n-1}}\right\}.$$

Calcolare

$$I_n = \int_{A_n} 1\, dxdy.$$

A cosa tende I_n per $n \to +\infty$?

Riferimenti bibliografici

[1] G. De Marco, Analisi Due, Teoria ed esercizi, Decibel Zanichelli, Padova, 1999.

[2] G. De Marco, C. Mariconda, Esercizi di Analisi due, Decibel Zanichelli, Padova, 1998.

[3] G. Gilardi, Analisi Due, McGraw-Hill, Milano, 1996.