Curve in $\mathbb{R}^n$

1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 1.1 *Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una curva è una funzione $f : I \to \mathbb{R}^n$. Si dice sostegno della curva l'insieme*

$$f(I) = \{f(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I\} . \tag{1.1}$$

Se $a \in I$ e $a = \inf I$, allora $f(a)$ si dice origine della curva; se $b \in I$ e $b = \sup I$, allora $f(b)$ si dice estremità della curva; nel caso in cui $f(a) = f(b)$ la curva si dice chiusa.

Osservazione 1 *Spesso una curva si chiama anche curva parametrica o arco.*

Esempio 1.2 *Le seguenti funzioni sono tutte delle curve.*

1.
$$\begin{array}{rcc} f : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2\cos t, \sin t) \end{array} \tag{1.2}$$

2.
$$\begin{array}{rcc} f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos^3 t, \sin^3 t) \end{array} \tag{1.3}$$

3.
$$\begin{array}{rcc} f : [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos^3 t, \sin^3 t) \end{array} \tag{1.4}$$

4.
$$\begin{array}{rcc} f : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos^3 t, \sin^3 t) \end{array} \tag{1.5}$$

5.
$$\begin{array}{rcl} f:[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t, t) \end{array} \tag{1.6}$$

6.
$$\begin{array}{rcl} f:\left[-1,\frac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, t^2) \end{array} \tag{1.7}$$

7.
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(\int_0^t \cos(\tau^2)d\tau, \int_0^t \sin(\tau^2)d\tau\right) \end{array} \tag{1.8}$$

8. *se* $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f:[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & (\cos^2\theta + h\cos\theta, \cos\theta\sin\theta + h\sin\theta) \end{array} \tag{1.9}$$

9.
$$\begin{array}{rcl} f:[0,4\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & (\theta\cos\theta, \theta\sin\theta) \end{array} \tag{1.10}$$

10. ***Catenaria***
$$\begin{array}{rcl} f:[-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left(t, c\cosh\left(\frac{t}{c}\right)\right) \end{array} \tag{1.11}$$

11. ***Trattrice***

$$\begin{array}{rcl} f:\left[\frac{\pi}{2},\pi\right) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & \left(\cos(\theta) + \log\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right), \sin(\theta)\right) \end{array} \tag{1.12}$$

Definizione 1.3 *Sia $f : I \to \mathbb{R}^n$ una curva e sia $t_0 \in I$. Allora f è continua in t_0 se*
$$\lim_{h\to 0} f(t_0+h) = f(t_0).$$
Inoltre f è derivabile in t_0 se

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$$

esiste finito in $\mathbb{R}^n$. In tal caso il valore del limite si indica con $f'(t_0)$.

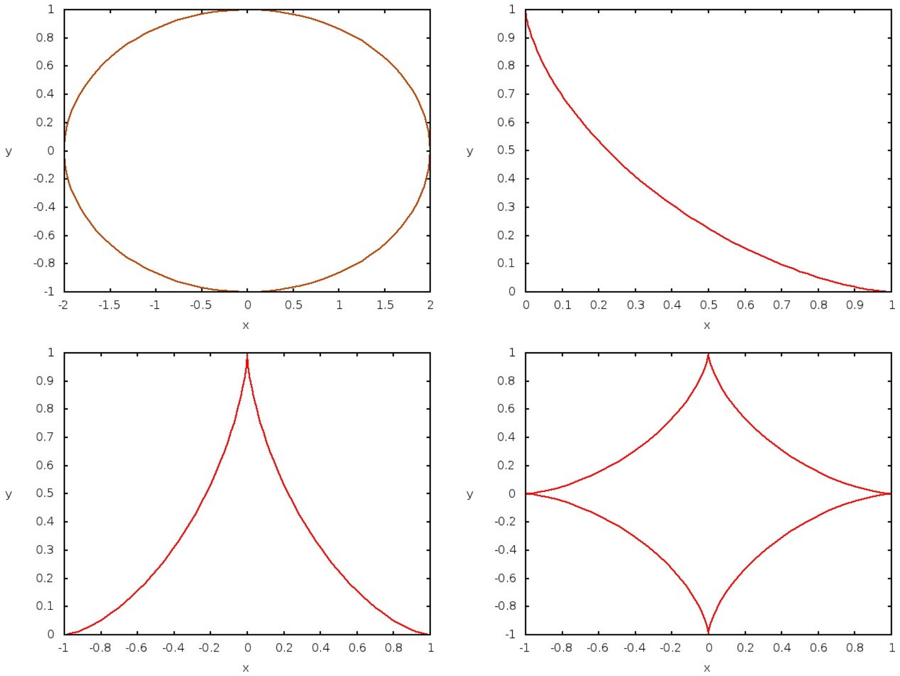

Figura 1: Sostegno delle curve (1.2), (1.3), (1.4) e (1.5).

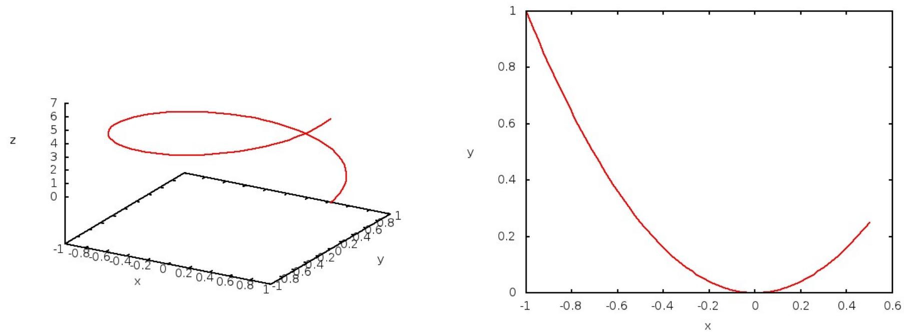

Figura 2: Sostegno delle curve (1.6) e (1.7).

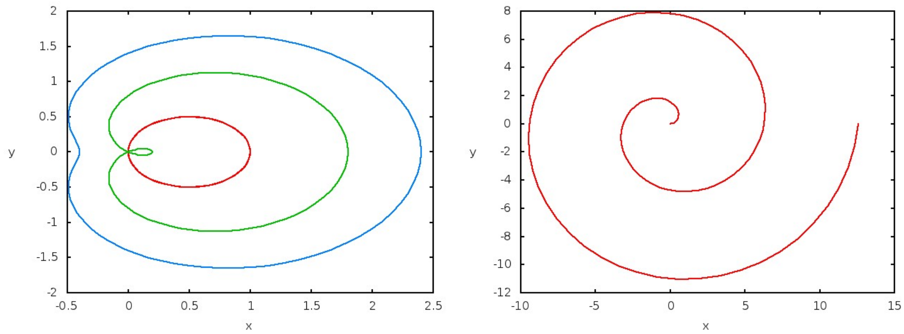

Figura 3: Sostegno delle curva (1.9) per 3 valori distinti del parametro h e sostegno della curva (1.10).

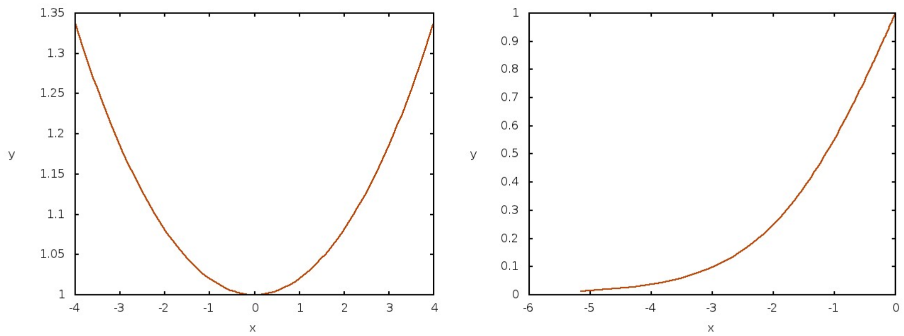

Figura 4: Sostegno delle curva (1.11) e (1.12).

Definizione 1.4 *Sia $f : I \to \mathbb{R}^n$ una curva e sia $t_0 \in I$. Se $f'(t_0)$ esiste ed è diverso da 0, allora $f'(t_0)$ si dice vettore tangente alla curva nel punto $f(t_0)$.*

Definizione 1.5 *Una curva $f : I \to \mathbb{R}^n$ si dice regolare se $f'(t)$ esiste per ogni $t \in I$, mentre si dice regolare a tratti se esistono m intervalli disgiunti $I_1, \ldots, I_m$ tali che $I = I_1 \cup \cdots \cup I_m$ e f ristretta a ciascun intervallo I_i è regolare.*

Osservazione 2 *Si noti che l'insieme delle curve da un intervallo I a $\mathbb{R}^n$ forma uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.*

Lemma 1.6 *Sia $f : I \to \mathbb{R}^n$ una curva e sia $t_0 \in I$. Supponiamo che f sia derivabile in t_0. Allora f è continua in t_0.*

Dimostrazione. Si noti che

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) - f(t_0) = \lim_{h \to 0} h \, \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = 0,$$

da cui segue la tesi. □

Lemma 1.7 *Siano $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ due curve derivabili in $t_0 \in I$. Allora, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la curva $\lambda f + \mu g$ è derivabile in t_0 e vale*

$$(\lambda f + \mu g)'(t_0) = \lambda f'(t_0) + \mu g'(t_0).$$

Proposizione 1.8 *Siano I e J intervalli di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ una curva derivabile in $t_0 \in I$ e $g : J \to I$ derivabile in $\tau_0 \in J$, dove $g(\tau_0) = t_0$. Allora $f \circ g : J \to \mathbb{R}^n$ è una curva derivabile in τ_0 e vale*

$$(f \circ g)'(\tau_0) = f'(g(\tau_0))g'(\tau_0).$$

Esercizio 1 *Quali curve definite nell'esempio 1.2 sono regolari? Quali invece sono curve chiuse?*

Esercizio 2 *Sia $f : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare tale che $|f(t)| = 1$ per ogni $t \in I$. Provare che, per ogni $t \in I$, $f'(t)$ e $f(t)$ sono ortogonali, cioè che $(f'(t), f(t)) = 0$.*

Esercizio 3 *Si dimostri il Lemma 1.7 e la Proposizione 1.8.*

2 Teorema del valor medio

Il teorema del valor medio o di Lagrange per funzioni di una variabile a valori in $\mathbb{R}$ è il seguente.

Teorema 2.1 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale che*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Mostriamo che in questa forma il teorema non si può estendere per curve a valori in $\mathbb{R}^n$. Infatti consideriamo la seguente curva in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{rcc} f : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t). \end{array}$$

Tale curva è continua in $[0, 2\pi]$ e derivabile in $(0, 2\pi)$. Inoltre

$$\frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi - 0} = (0, 0).$$

Se valesse il teorema del valor medio, dovrebbe esistere un $t \in (0, 2\pi)$ tale che $f'(t) = (0,0)$, ma, per definizione di f, $f'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0)$.

Il teorema del valor medio vale comunque nella seguente forma.

Teorema 2.2 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) una curva continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) e tale che*

1. $L := \sup_{t \in (a,b)} \|f'(t)\| < +\infty$;
2. $\lim_{t \to a^+} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ *esiste;*
3. $\lim_{t \to a^+} \frac{\|f(t) - f(a)\|}{t - a} \leq L$.

Allora

$$\|f(b) - f(a)\| \leq L(b - a).$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo l'insieme

$$T_\varepsilon = \{t \in [a,b] : \|f(t) - f(a)\| \leq (L + \varepsilon)(t - a)\} .$$

Chiaramente $a \in T_\varepsilon$ e quindi $T_\varepsilon \neq \emptyset$. Inoltre T_ε è un insieme chiuso. Di conseguenza esiste $\xi \in [a,b]$ tale che $\xi = \max T_\varepsilon$.

Se $\xi < b$, allora

$$\lim_{t \to \xi^+} \frac{\|f(t) - f(\xi)\|}{t - \xi} \leq L < L + \varepsilon.$$

Pertanto esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|f(t) - f(\xi)\| < (L+\varepsilon)(t-\xi),$$

per ogni $\xi < t < \xi + \delta$. Se $\xi < t < \xi + \delta$, allora

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(a)\| &\leq \|f(t) - f(\xi)\| + \|f(\xi) - f(a)\| \\ &< (L+\varepsilon)(t-\xi) + (L+\varepsilon)(\xi - a) \\ &= (L+\varepsilon)(t-a), \end{aligned}$$

che è assurdo per la massimalità di ξ.

L'unica possibilità è che $\xi = b$ e quindi il teorema è dimostrato per l'arbitrarietà di ε. $\square$

3 Lunghezza di una curva

Sia $f : I \to \mathbb{R}^n$ una curva e sia $\{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ una suddivisione dell'intervallo I, cioè $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ e $t_0, t_m \in I$. Di conseguenza si hanno dei punti $\{f(t_0), \ldots, f(t_m)\}$ sul sostegno della curva e quindi si può considerare la poligonale in $\mathbb{R}^n$ con vertici $\{f(t_0), \ldots, f(t_m)\}$. La lunghezza di tale poligonale è

$$\sum_{i=1}^{m} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|.$$

Definizione 3.1 *Sia $f : I \to \mathbb{R}^n$ una curva. Tale curva si dice rettificabile se*

$$\sup_{\substack{m \in \mathbb{N},\, t_0, t_m \in I \\ t_0 < t_1 < \cdots < t_m}} \sum_{i=1}^{m} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|$$

è finito. In tal caso tale valore si dice lunghezza della curva.

Vale il seguente risultato fondamentale per il calcolo delle lunghezze.

Teorema 3.2 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva e siano $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = b$. Supponiamo che:*

1. *f continua in $[a, b]$;*
2. *f regolare in ciascun intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ con $i \in \{1, \dots, m\}$;*
3. *f' continua in ciascun intervallo $]t_i, t_{i+1}[$ con $i \in \{1, \dots, m\}$;*
4. *per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, f' ristretta all'intervallo $]t_i, t_{i+1}[$ si può estendere per continuità a tutto $[t_i, t_{i+1}]$.*

Allora f è rettificabile e la sua lunghezza è data da

$$\int_I \|f'(t)\|\,dt = \sum_{i=0}^{m} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\|\,dt\,.$$

Esempio 3.3 *Si consideri la curva (1.3). Tale curva è rettificabile. Inoltre la sua lunghezza è data da*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\cos^2 t \sin^4 t}\,dt = \frac{3}{2}\,.$$

Esempio 3.4 *Si consideri la curva (1.6). Tale curva è rettificabile. Inoltre la sua lunghezza è data da*

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\,dt = 2\sqrt{2}\pi\,.$$

Esempio 3.5 *Si consideri la curva (1.7). Tale curva è rettificabile. Inoltre la sua lunghezza è data da*

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{4}\log\Big((\sqrt{5}-2)(\sqrt{2}-1)\Big)\,.$$

Esempio 3.6 *Si consideri la curva (1.8). Tale curva non è rettificabile. Cosideriamo la restrizione di f all'intervallo $[0, \pi]$. Tale restrizione è rettificabile e la lunghezza è data da*

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2(t^2) + \sin^2(t^2)}\,dt = \pi\,.$$

4 Integrali curvilinei

Definiamo ora il concetto di integrale curvilineo. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva e siano $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = b$. Supponiamo che:

1. f continua in $[a,b]$;
2. f regolare in ciascun intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ con $i \in \{1, \dots, m\}$;
3. f' continua in ciascun intervallo $]t_i, t_{i+1}[$ con $i \in \{1, \dots, m\}$;
4. per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, f' ristretta all'intervallo $]t_i, t_{i+1}[$ si può estendere per continuità a tutto $[t_i, t_{i+1}]$.

Indichiamo con γ il sostegno di f e sia D un'aperto di $\mathbb{R}^n$ che contiene γ, cioè tale che $\gamma \subseteq D$.

Definizione 4.1 *Sia $g : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora definiamo l'integrale (curvilineo) di g su γ come*

$$\int_\gamma g\, ds = \int_a^b g(f(t)) \|f'(t)\|\, dt. \tag{4.1}$$

Notazione. Qualche volta l'integrale curvilineo si può indicare anche con i simboli

$$\int_\gamma g, \quad \int_\gamma g\|df\|, \quad \int_f g, \quad \int_f g\|df\|.$$

Osservazione 3 *Si osservi che se g è la funzione costantemente uguale a 1, allora $\int_\gamma g\, ds$ coincide con la lunghezza della curva f.*

La Definizione 4.1 è una buona definizione, nel senso che è invariante per riparametrizzazioni di classe C^1. Vale infatti il seguente risultato.

Proposizione 4.2 *Supponiamo che f sia di classe C^1 e sia $p : [c,d] \to [a,b]$ una funzione di classe C^1, strettamente monotona e tale che $p([c,d]) = [a,b]$. Sia $g : D \to \mathbb{R}$ continua. Allora*

$$\int_\gamma g\, ds = \int_c^d g(f(p(r))) \left\| \frac{d}{dr} f(p(r)) \right\| dr\,.$$

Dimostrazione. Sia $p : [c, d] \to [a, b]$ una funzione strettamente crescente, di classe C^1 e tale che $p(c) = a$ e $p(d) = b$. Consideriamo la curva

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : [c, d] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ r & \longmapsto & f(p(r)). \end{array}$$

Si noti che il sostegno di $\tilde{f}$ coincide con γ. Inoltre

$$\begin{aligned} \int_\gamma g\, ds &= \int_a^b g(f(t)) \|f'(t)\|\, dt \\ &= \int_c^d g(f(p(r))) \|f'(p(r))\| p'(r)\, dr \\ &= \int_c^d g(\tilde{f}(r)) \left\| \tilde{f}'(r) \right\| dr. \end{aligned}$$

Sia ora $p : [c, d] \to [a, b]$ una funzione strettamente decrescente, di classe C^1 e tale che $p(c) = b$ e $p(d) = a$. Consideriamo la curva

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : [c, d] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ r & \longmapsto & f(p(r)). \end{array}$$

Si noti che il sostegno di $\tilde{f}$ coincide con γ. Inoltre

$$\begin{aligned} \int_\gamma g\, ds &= \int_a^b g(f(t)) \|f'(t)\|\, dt \\ &= \int_d^c g(f(p(r))) \|f'(p(r))\| p'(r)\, dr \\ &= \int_c^d g(\tilde{f}(r)) \left\| \tilde{f}'(r) \right\| dr. \end{aligned}$$

La dimostrazione è quindi finita. $\square$

Esempio 4.3 *Si consideri la curva (1.2) ristretta all'intervallo* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *e sia* γ *il suo sostegno. Data la funzione* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita da* $g(x, y) = x$*, allora*

$$\int_\gamma g\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = 2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \log \left(\frac{7\sqrt{3} + 12}{7\sqrt{3} - 12} \right).$$

Esempio 4.4 *Si consideri la spirale di Archimede di equazione in coordinate polari $\rho = \theta$ con $\theta \in [0, 4\pi]$. Una curva il cui sostegno γ coincide con la spirale di Archimede è data da*

$$\begin{array}{rcc} f : [0, 4\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t \cos t, t \sin t). \end{array}$$

Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $g(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$. Allora l'integrale

$$\int_\gamma g \, ds = \int_0^{4\pi} t^3 \sqrt{1 + t^2} \, dt \, .$$

Gli integrali curvilinei sono importanti in fisica e in meccanica. Se ad esempio $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è una curva materiale in $\mathbb{R}^3$ di sostegno γ, e $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è una funzione densità di massa, allora la massa totale della curva materiale è data da

$$m = \int_\gamma \mu \, ds = \int_a^b \mu(f(t)) \|f'(t)\| \, dt \, ,$$

mentre le coordinate del baricentro sono date da

$$\left(\frac{1}{m} \int_\gamma x\mu \, ds, \frac{1}{m} \int_\gamma y\mu \, ds, \frac{1}{m} \int_\gamma z\mu \, ds \right) \, .$$