1-Forme Differenziali

30 novembre 2011

1 Definizioni di base

Siano $n \in \mathbb{N}$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Con $(\mathbb{R}^n)'$ denotiamo il duale topologico di $\mathbb{R}^n$, cioè l'insieme

$$(\mathbb{R}^n)' = \{p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbb{R}\text{-lineari e continue}\} . \tag{1.1}$$

Osservazione 1 *Dato che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ (su $\mathbb{R}$) ha dimensione finita, ogni funzione lineare $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua.*

Sia $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$ e sia $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ la base duale di $(\mathbb{R}^n)'$. Ricordiamo che le dx_i sono funzioni lineari e continue da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ tali che

$$dx_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i, \\ 0 & \text{se } j \neq i. \end{cases} \tag{1.2}$$

Osservazione 2 *Se si considera la base canonica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di $\mathbb{R}^n$, la corrispondente base duale $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ soddisfa*

$$dx_i(a_1, \ldots, a_n) = a_i .$$

Definizione 1.1 *Una 1-forma differenziale ω su A è una funzione*

$$\omega : A \to (\mathbb{R}^n)' .$$

Dalla precedente definizione segue che se $x \in A$ allora $\omega(x) \in (\mathbb{R}^n)'$, ma allora si può scrivere $\omega(x)$ come combinazione lineare di elementi della base duale, cioè

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j(x) dx_j. \tag{1.3}$$

Sia ora $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Il differenziale (di Frechet) di f in un punto $x \in A$ è una funzione lineare e continua da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, cioè $f'(x) \in (\mathbb{R}^n)'$ e pertanto f' è una 1-forma differenziale.

Definizione 1.2 *Una 1-forma differenziale continua ω si dice esatta se esiste una funzione $f \in C^1(A;\mathbb{R})$ tale che $\omega = f'$. In tal caso f si dice una primitiva di ω.*

Una 1-forma differenziale continua ω si dice localmente esatta se per ogni $x \in A$ esiste un $r > 0$ con $B(x,r) \subseteq A$ e una funzione $f \in C^1(B(x,r);\mathbb{R})$ tale che $\omega = f'$ in $B(x,r)$.

Lemma 1.3 *Sia A un aperto connesso e $w \in C(A;(\mathbb{R}^n)')$ una 1-forma esatta. Se f_1 e f_2 sono due primitive, allora $f_1 - f_2$ è costante in A.*

Dimostrazione. Si ha che $\omega = f_1' = f_2'$. Quindi $(f_1 - f_2)' = 0$. La conclusione segue dal fatto che A è connesso. □

Definizione 1.4 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. Un cammino in A è una curva in A, cioè una funzione $\alpha : I \to A$ con I un intervallo di $\mathbb{R}$.*

Definizione 1.5 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Un cammino $\alpha : [a,b] \to A$ si dice regolare a tratti se esistono $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$ tali che*

1. *α è continua;*
2. *α è derivabile con continuità in (t_i, t_{i+1}) per ogni $i \in \{0, \ldots, m-1\}$;*
3. *α' si può estendere per continuità in $[t_i, t_{i+1}]$ per ogni $i \in \{0, \ldots, m-1\}$.*

Definizione 1.6 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Un cammino $\alpha : [a,b] \to A$ si dice un circuito se $\alpha(a) = \alpha(b)$.*

Definizione 1.7 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ la base duale della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Una 1-forma differenziale $\omega \in C^0(A;(\mathbb{R}^n)')$ si dice chiusa se, per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, le derivate parziali $\frac{\partial}{\partial x_j}\omega_i(x)$ esistono e*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\omega_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\omega_j(x), \tag{1.4}$$

dove $\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i$.

Vale il seguente risultato.

Proposizione 1.8 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\omega \in C^1(A; (\mathbb{R}^n)')$ una 1-forma differenziale esatta. Allora ω è chiusa.*

Dimostrazione. Sia f una primitiva di ω. Si ha

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) dx_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i, \end{aligned}$$

dove $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ denota la base duale della base canonica di $\mathbb{R}^n$. Si conclude pertanto per il teorema di Schwarz. □

2 Integrale di una 1-forma differenziale

Sia $\alpha : [a, b] \to A$ un cammino regolare a tratti e $\omega \in C^0(A; (\mathbb{R}^n)')$ una 1-forma differenziale. Definiamo

$$\int_\alpha \omega := \int_a^b \omega(\alpha(t))\alpha'(t) dt. \tag{2.1}$$

Osservazione 3 *Si noti che $\omega(\alpha(t)) \in (\mathbb{R}^n)'$ e $\alpha'(t) \in \mathbb{R}^n$. Quindi*

$$\omega(\alpha(\cdot))\alpha'(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}$$

è una funzione reale a valori reali e continua a tratti.

Osservazione 4 *Dalla definizione di integrale di una 1-forma differenziale, si deduce facilmente che*

$$\int_a^b \omega(\alpha(t))\alpha'(t) dt = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b \omega_j(\alpha(t)) dx_j(\alpha'(t)) dt \tag{2.2}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_a^b \omega_j(\alpha(t))\alpha_j'(t) dt, \tag{2.3}$$

dove $\alpha(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t) x_j$.

Lemma 2.1 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\omega \in C(A;(\mathbb{R}^n)')$ e $\alpha : [a,b] \to A$ un cammino regolare a tratti. Se $p : [c,d] \to [a,b]$ è un diffeomorfismo strettamente monotono e suriettivo, allora*

$$\int_{\alpha\circ p} \omega = \begin{cases} \int_\alpha \omega, & \textit{se } p \textit{ è crescente}, \\ \\ -\int_\alpha \omega, & \textit{se } p \textit{ è decrescente}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

Definizione 2.2 *Siano $\alpha : [a,b] \to A$ e $\beta : [c,d] \to A$ due cammini tali che $\alpha(b) = \beta(c)$. Si chiama giustapposizione di α e β il cammino $\alpha \cdot \beta$ così definito:*

$$\begin{array}{rcl} \alpha\cdot\beta : [a, b+d-c] & \longrightarrow & A \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \alpha(t), \ \textit{se} \ t \in [a,b], \\ \beta(c+t-b), \ \textit{se} \ t \in [b, b+d-c]. \end{cases} \end{array} \tag{2.5}$$

Lemma 2.3 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $\omega \in C(A;(\mathbb{R}^n)')$ una 1-forma differenziale continua. Siano inoltre $\alpha : [a,b] \to A$ e $\beta : [c,d] \to A$ due cammini regolari a tratti con $\alpha(b) = \beta(c)$. Allora*

$$\int_{\alpha\cdot\beta} \omega = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega.$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

Teorema 2.4 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\omega \in C(A;(\mathbb{R}^n)')$ una 1-forma esatta e $\alpha : [a,b] \to A$ e $\beta : [c,d] \to A$ due cammini regolari a tratti tali che $\alpha(a) = \beta(c)$ e $\alpha(b) = \beta(d)$. Allora*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega. \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Dato che $\omega = f'$, si ha

$$\begin{aligned} \int_\alpha \omega &= \int_a^b \omega(\alpha(t))\alpha'(t)dt \\ &= \int_a^b f'(\alpha(t))\alpha'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\alpha(t))dt \\ &= f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)). \end{aligned}$$

Analogamente si prova che $\int_\alpha \omega = f(\beta(d)) - f(\beta(c)) = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$ e si conclude. $\square$

Osservazione 5 *Si noti che, nelle ipotesi del teorema precedente, l'integrale di ω lungo un cammino dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale del cammino.*

Teorema 2.5 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\omega \in C(A; (\mathbb{R}^n)')$ una 1-forma differenziale. Sono equivalenti:*

1. *ω è esatta;*
2. *$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$ per ogni coppia di cammini regolari a tratti α e β con lo stesso punto iniziale e finale;*
3. *$\int_\alpha \omega = 0$ per ogni circuito regolare a tratti α in A.*

Dimostrazione. **(Cenni)**. Chiaramente per il Teorema 2.4, se vale 1, allora si deduce 2.

Supponiamo che valga 2 e sia $\alpha : [a, b] \to A$ un circuito regolare a tratti. Sia $\beta : [0, 1] \to A$ il circuito definito da $\beta(t) = \alpha(a)$. Allora, per ipotesi,

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega = \int_0^1 0dt = 0.$$

Non dimostriamo invece che 3 implica 1. $\square$

Osservazione 6 *Per il Teorema 2.5, per mostrare che una 1-forma differenziale e continua ω su A aperto di $\mathbb{R}^n$ non è esatta, basta esibire un circuito regolare a tratti α tale che*

$$\int_\alpha \omega \neq 0\,.$$

3 Differenziale di una 1-forma

Sia $\omega \in C^1(A; (\mathbb{R}^n)')$ una 1-forma differenziale. Allora il differenziale di ω nel punto $x \in A$ è una funzione

$$\omega'(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n)' \tag{3.1}$$

lineare e continua. Di conseguenza si può pensare $\omega'(x)$ come una forma bilineare e continua su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. L'insieme delle forme bilineari (e continue) su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ costituisce uno spazio vettoriale di dimensione n^2. Una base dello spazio delle applicazioni bilineari da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ è data da

$$\{dx_i \otimes dx_j : i, j \in \{1, \dots, n\}\}, \tag{3.2}$$

dove le funzioni $dx_i \otimes dx_j$ agiscono nel modo seguente

$$dx_i \otimes dx_j(x_h, x_k) = dx_i(x_h)dx_j(x_k) = \delta_{ih}\delta_{jk}. \tag{3.3}$$

Si può facilmente provare che $\omega'(x)$ si scrive nella forma

$$\omega'(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\omega_i(x)dx_i \otimes dx_j. \tag{3.4}$$

Definiamo il <u>prodotto esterno</u> di dx_i con dx_j come

$$dx_i \wedge dx_j := dx_i \otimes dx_j - dx_j \otimes dx_i. \tag{3.5}$$

Il <u>differenziale esterno</u> di ω è

$$\begin{aligned} d\omega(x) &= \sum_{i,j=1}^{n} \partial_j\omega_i(x)dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} (\partial_j\omega_i(x) - \partial_i\omega_j(x))\, dx_i \wedge dx_j \end{aligned}$$

da cui si vede che una 1 forma differenziale ω è chiusa se e solo se $d\omega = 0$.

Proposizione 3.1 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\omega \in C^1(A; (\mathbb{R}^n)')$ una 1-forma differenziale chiusa. Allora ω è localmente esatta.*

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione solo per il caso $n = 2$. La 1-forma differenziale ω si può scrivere

$$\omega(x, y) = \omega_1(x, y)dx + \omega_2(x, y)dy,$$

dove $\{dx, dy\}$ è la base duale della base canonica di $\mathbb{R}^2$. Sia $(x_0, y_0) \in A$. Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $U :=]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\subseteq A$. Per ogni $(x, y) \in U$, definiamo i cammini $\alpha_1, \alpha_2 : [0, 1] \to A$

$$\alpha_1(t) = (x_0 + t(x - x_0), y_0), \quad \alpha_2(t) = (x, y_0 + t(y - y_0)).$$

e

$$F(x,y) = \int_{\alpha_1} \omega + \int_{\alpha_2} \omega.$$

Pertanto abbiamo definito una funzione $F : U \to \mathbb{R}$. Si noti che

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} \omega_1(s, y_0)ds + \int_{y_0}^{y} \omega_2(x,s)ds$$

e quindi

$$\begin{aligned} \partial_x F(x,y) &= \omega_1(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_x \omega_2(x,s)ds \\ &= \omega_1(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_y \omega_1(x,s)ds \\ &= \omega_1(x,y_0) + \omega_1(x,y) - \omega_1(x,y_0) = \omega_1(x,y). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\partial_y F(x,y) = \omega_2(x,y),$$

da cui segue la tesi. □

Corollario 3.2 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $\omega \in C^1(A; (\mathbb{R}^n)')$ una 1-forma differenziale. Allora ω è chiusa se e solo se è localmente esatta.*

4 Omotopia di circuiti

Definizione 4.1 *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$ e siano $\alpha : [a,b] \to A$ e $\beta : [a,b] \to A$ due circuiti continui. I circuiti α e β si dicono omotopi se esiste una funzione continua $h : [a,b] \times [0,1] \to A$ tale che*

1. *$h(t,0) = \alpha(t)$ per ogni $t \in [a,b]$;*
2. *$h(t,1) = \beta(t)$ per ogni $t \in [a,b]$;*
3. *$h(a,\lambda) = h(b,\lambda)$ per ogni $\lambda \in [0,1]$.*

Definizione 4.2 *Un aperto A di $\mathbb{R}^n$ si dice semplicemente connesso se A è connesso per archi e se ogni circuito in A è omotopo ad un circuito costante.*

Esempio 4.3 *L'insieme* $\mathbb{R}^n$ *è semplicemente connesso. L'insieme* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *non è semplicemente connesso. L'insieme* $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *è semplicemente connesso, mentre* $\mathbb{R}^3$ *privato di una retta non è semplicemente connesso.*

Vale il seguente teorema.

Teorema 4.4 *Sia* A *un aperto di* $\mathbb{R}^n$*,* $\omega \in C^0(A; (\mathbb{R}^n)')$ *una* 1*-forma differenziale localmente esatta e* α *e* β *due circuiti regolari a tratti e omotopi in* A*. Allora*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega. \tag{4.1}$$

Corollario 4.5 *Sia* A *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *semplicemente connesso e sia* $\omega \in C^0(A; (\mathbb{R}^n)')$ *una* 1*-forma differenziale localmente esatta. Allora*

$$\int_\alpha \omega = 0$$

per ogni circuito regolare a tratti α *in* A*.*

Dimostrazione. Dato che A è semplicemente connesso, il circuito α è omotopo ad un circuito costante β. Per il Teorema 4.4,

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega = 0,$$

e quindi la dimostrazione è finita. □

Corollario 4.6 *Sia* A *un aperto di* $\mathbb{R}^n$ *semplicemente connesso e sia* $\omega \in C^1(A; (\mathbb{R}^n)')$ *una* 1*-forma differenziale chiusa. Allora* ω *è esatta.*

Dimostrazione. Si conclude facilmente per il Corollario 4.5 e per il Teorema 2.5. □

5 Esercizi sulle 1-forme differenziali

Esercizio 1 *Si consideri la* 1*-forma differenziale su* $\mathbb{R}^2$

$$\omega = \left(\frac{2x}{1+(x^2+y)^2} + e^{x-y} + x - y \right) dx + \left(\frac{1}{1+(x^2+y)^2} - e^{x-y} + y^2 \right) dy$$

e i cammini

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \gamma_2 : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (2\cos t, \sin t) \end{array}$$

Si calcoli

$$\max \left\{ \int_{\gamma_1} \omega, \int_{\gamma_2} \omega \right\}.$$

Esercizio 2 *Sia* $\omega : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2+y^2 \neq 0\} \to (\mathbb{R}^3)'$ *la* 1*-forma differenziale*

$$\omega(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy + 3z^2\, dz.$$

1. ω *è chiusa?*
2. ω *è esatta?*
3. *Calcolare* $\int_\gamma \omega$ *dove*

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (\cos t, \sin t, 0)\,. \end{array}$$

Esercizio 3 *Si discuta l'esattezza della* 1*-forma differenziale*

$$\begin{aligned} \omega(x,y) \;&=\; \left[\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} + \frac{2x}{x^2+y^2} \right] dx \\ &\quad + \left[\frac{2(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} + \frac{2y}{x^2+y^2} \right] dy, \end{aligned}$$

definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,1)\}$.

Esercizio 4 *Si consideri la* 1*-forma differenziale definita su* $\mathbb{R}^3$

$$\omega = \left(z^2 - 2xyz\right) dx - x^2 z dy + x\,(2z - xy)\,dz$$

e il cammino

$$\begin{array}{rcc} \gamma : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (t^2 - t, 2\cos(2\pi t), e^t) \end{array}$$

1. *Dire se* ω *è esatta o meno.*
2. *Calcolare* $\int_\gamma \omega$.

Regolarità	Proprietà
C^0	ω esatta se e solo se $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni circuito regolare a tratti γ
C^0	ω esatta se e solo se $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$ per ogni coppia α e β di cammini regolari a tratti con lo stesso punto iniziale e finale.
C^0	ω esatta $\Longrightarrow$ ω localmente esatta.
C^0	ω localmente esatta $\Longrightarrow$ $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$ per ogni α e β circuiti regolari a tratti e omotopi.
C^1	ω esatta $\Longrightarrow$ ω chiusa.
C^1	ω localmente esatta se e solo se ω chiusa.
C^1	ω chiusa, A semplicemente connesso $\Longrightarrow$ ω esatta.