Analisi Matematica II — 5 luglio 2012

La durata dell'esame è di **180** *min. Nessuna calcolatrice grafica è consentita.*

Si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Determinare e classificare tutti i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 z^3 - yz^2 - 4x + 3y - 5z \qquad \text{per ogni } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

Imponendo la condizione $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ si ottiene

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 2yz^3 - z^2 + 3 = 0 \\ 3y^2 z^2 - 2yz - 5 = 0 . \end{cases}$$

Si ottiene immediatamente $x = 2$. Ricavando $y = \frac{z^2-3}{2z^3}$ dalla seconda equazione e sostituendo nella terza si ottiene dopo alcune semplificazioni $7z^4 + 2z^2 - 9 = 0$. Da quest'ultima di ricava $z^2 = 1$ e quindi $z = \pm 1$.

In conclusione gli unici punti critici di f sono $(2,-1,1)$ e $(2,1,-1)$.

La matrice Hessiana di f in un generico punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è data da

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2z^3 & 6yz^2 - 2z \\ 0 & 6yz^2 - 2z & 6y^2 z - 2y . \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$D^2 f(2,-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

e

$$D^2 f(2,1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 8 & -8 . \end{pmatrix}$$

La prima matrice ha come autovalori 2 e $5 \pm \sqrt{73}$ mentre la seconda 2 e $-5 \pm \sqrt{73}$.

In conclusione entrambi i punti critici sono punti di sella.

(2) Sia data la forma differenziale $\omega : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)'$ definita da

$$\omega(x,y) := \frac{2xy^2 + y}{1 + x^2 y^2}\, dx + \frac{x + 2x^2 y}{1 + x^2 y^2}\, dy .$$

(i) Stabilire se ω è esatta e in caso affermativo calcolarne tutte le primitive.

(ii) Calcolare $\int_\gamma \omega$ con $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t) \qquad \text{per ogni } t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] .$$

(i) La forma differenziale ω è esatta e una generica primitiva $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ può essere calcolata con il procedimento seguente:

$$f(x,y) = \int \frac{2xy^2 + y}{1 + x^2y^2}\, dx + \alpha(y) = \log(1 + x^2y^2) + \arctan(xy) + \alpha(y)\,.$$

con $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione derivabile opportuna. Inoltre

$$\frac{x + 2x^2y}{1 + x^2y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y + x}{1 + x^2y^2} + \alpha'(y)\,.$$

Da quest'ultima identità ricaviamo $\alpha' \equiv 0$ e quindi α è una funzione costante. In conclusione tutte e sole le primitive di sono le funzioni

$$f_c(x,y) = \log(1 + x^2y^2) + \arctan(xy) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

(ii) Essendo ω esatta si ha

$$\int_\gamma \omega = f_0\left(\gamma\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) - f_0(\gamma(0)) = f_0\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - f_0(1,0) = \log\frac{5}{4} + \arctan\frac{1}{2}$$

con f_0 primitiva di ω corrispondente a $c = 0$.

(3) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_T \sin^2(x + 3y)\, dxdy\,.$$

dove $T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} - \pi < y < \frac{x}{2} + 2\pi \text{ e } 3x < y < 3x + 3\pi\}$.

Utilizzando il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} u = 2y - x \\ v = y - 3x \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_T \sin^2(x + 3y)\, dxdy &= \int_{(-2\pi,4\pi)\times(0,3\pi)} \sin^2(2u - v)\frac{1}{5}\, dudv \\
&= \frac{1}{5}\int_{-2\pi}^{4\pi}\left(\int_0^{3\pi} \frac{1 - \cos(4u - 2v)}{2}\, dv\right) du \\
&= \frac{1}{10}\int_{-2\pi}^{4\pi}\left(3\pi + \frac{\sin(4u - 6\pi)}{2} - \frac{\sin(4u)}{2}\right) du = \frac{9}{5}\pi
\end{aligned}$$

(4) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) := (x^2 + 1)\sinh y - xy + x \qquad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e sia $Z := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$.

(i) Si dimostri che esiste un'unica $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$(x, y) \in Z \qquad \text{se e solo se} \qquad y = \varphi(x) .$$

(ii) Si studi il segno di φ e si determinino gli eventuali punti critici di φ.

(i) Poichè

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2 + 1) \cosh y - x \geq x^2 - x + 1 > 0 \qquad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2 ,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$. Inoltre per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{y \to +\infty} f(x, y) = +\infty , \qquad \lim_{y \to -\infty} f(x, y) = -\infty .$$

Se ne deduce che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un'unico $y \in \mathbb{R}$ tale che $f(x, y) = 0$. Questo dimostra l'esistenza della funzione φ.

(ii) Poichè $f(0, 0) = 0$ allora $\varphi(0) = 0$. Inoltre

$$\begin{cases} f(x, 0) = x > 0 & \text{se } x > 0 \\ f(x, 0) = x < 0 & \text{se } x < 0 . \end{cases}$$

Ma come già osservato nel punto (i), per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è strettamente crescente e pertanto se $x > 0$, l'unico valore di y per il quale $f(x, y) = 0$ deve essere negativo e quindi $\varphi(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Con un ragionamento analogo si conclude che $\varphi(x) > 0$ per ogni $x < 0$.
Per determinare i punti critici utilizziamo la seguente rappresentazione per φ':

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} = -\frac{2x \sinh(\varphi(x)) - \varphi(x) + 1}{(x^2 + 1) \cosh(\varphi(x)) - x}$$

Pertanto se x è un punto critico per φ allora deve soddisfare

$$\begin{cases} 2x \sinh(\varphi(x)) - \varphi(x) + 1 = 0 \\ (x^2 + 1) \sinh(\varphi(x)) - x\varphi(x) + x = 0 . \end{cases}$$

Ricavando $\sinh(\varphi(x))$ dalla prima equazione (non è restrittivo supporre $x \neq 0$ in quanto $\varphi'(0) = -1$) e sostituendo nella seconda si ottiene

$$\frac{1 - x^2}{2x}(\varphi(x) - 1) = 0 .$$

D'altra parte la funzione φ non può mai assumere il valore 1 in quanto $f(x, 1) = (x^2 + 1) \sinh 1 \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e pertanto deve essere necessariamente $1 - x^2 = 0$ e cioè $x = \pm 1$. Questi sono tutti e soli i punti critici di φ.

(5) Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = t\sinh(u^2(t) - 1) \\ u(0) = \alpha\,. \end{cases}$$

(i) Si studino esistenza e unicità locali e globali delle soluzioni del problema di Cauchy al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Detta u_α la soluzione del problema di Cauchy tale che $u_\alpha(0) = \alpha$ e detto I_α il corrispondente intervallo massimale di esistenza, dopo averne dimostrato l'esistenza si determinino i limiti di u_α agli estremi di I_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Si osservi prima di tutto che la funzione $f(t, y) = t\sinh(y^2 - 1) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e pertanto vengono soddisfatte le ipotesi del terorema di esistenza e unicità locale. Pertanto per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione definita su un intorno di $t = 0$. Denotiamo con I_α l'intervallo massimale di esistenza di tale soluzione. Si osservi che per $\alpha = 1$ e $\alpha = -1$ le corrispondenti soluzioni sono costanti e ovviamente definite su tutto $\mathbb{R}$.
Consideriamo separatamente i casi $\alpha > 1$, $-1 < \alpha < 1$ e $\alpha < -1$.
Se $\alpha > 1$ la corrispondente soluzione u_α non può scendere sotto il valore 1 in quanto il suo grafico intersecherebbe il grafico della soluzione costantemente uguale a 1 violando così il teorema di unicità locale. Pertanto $u_\alpha(t) > 1$ per ogni $t \in I_\alpha$. Inoltre si ha che u_α è crescente in $I_\alpha \cap (0, +\infty)$ e decrescente in $I_\alpha \cap (-\infty, 0)$. Affermiamo che I_α è un intevallo limitato. Si può dedurre facilmente dall'equazione che u_α è una funzione pari e quindi è sufficiente dimostrare che non può essere prolungata a tutto $(0, +\infty)$.
Per assurdo sia $\sup I_\alpha = +\infty$. Integrando si avrebbe quindi

$$\int_0^t \frac{u_\alpha'(s)}{\sinh(u_\alpha^2(s) - 1)}\, ds = t \qquad \text{per ogni } t > 0$$

e quindi dopo il cambiamento di variabili $z = y(s)$

$$\int_\alpha^{u_\alpha(t)} \frac{1}{\sinh(z^2 - 1)}\, dz = t \qquad \text{per ogni } t > 0\,. \tag{1}$$

Tenendo conto che $u_\alpha(t) > \alpha$ per ogni $t > 0$ allora

$$0 < \int_\alpha^{u_\alpha(t)} \frac{1}{\sinh(z^2 - 1)}\, dz < \int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{\sinh(z^2 - 1)}\, dz < +\infty \qquad \text{per ogni } t > 0\,.$$

Pertanto il primo membro di (1) rimane limitato quando $t \to +\infty$ mentre il secondo membro tende a $+\infty$ e questo è assurdo. Questo significa che $\sup I_\alpha < +\infty$. Per simmetria $\inf I_\alpha > -\infty$.
Si consideri ora il caso $\alpha \in (-1, 1)$. Grazie al teorema di unicità locale, il grafico di u_α non può intersecare le rette di equazione $u = \pm 1$ e pertanto $-1 < u_\alpha(t) < 1$ per ogni $t \in I_\alpha$. La u_α risulta essere decrescente in $I_\alpha \cap (0, +\infty)$ e crescente in

$I_\alpha \cap (-\infty, 0)$. Si ha allora $I_\alpha = \mathbb{R}$. Se per assurdo fosse $R_\alpha = \sup I_\alpha < +\infty$ allora si avrebbe che esiste finito il limite

$$\ell := \lim_{t \to R_\alpha^-} u_\alpha(t)\,.$$

Ma allora applicando il teorema di esistenza locale al problema

$$\begin{cases} u'(t) = t \sinh(u^2(t) - 1) \\ u(R_\alpha) = \ell \end{cases}$$

si riuscirebbe a prolungare la funzione u_α oltre a R_α contraddicendo la definizione di R_α.

Infine se $\alpha < -1$ si ha che u_α è crescente in $I_\alpha \cap (0, +\infty)$ e decrescente in $I_\alpha \cap (-\infty, 0)$. Ma u_α deve rimanere sotto al valore -1 e quindi risulta essere limitata. Analogamente al caso precedente si dimostra che $I_\alpha = \mathbb{R}$.

(ii) La monotonia delle funzioni u_α di cui si è discusso nel punto (i) consente di affermare l'esistenza dei limiti agli estremi di I_α.

Per $\alpha > 1$ sia $R_\alpha := \sup I_\alpha < +\infty$. Poichè la funzione u_α non può essere prolungata oltre R_α allora

$$\lim_{t \to R_\alpha^-} u_\alpha(t) = +\infty\,.$$

Analogamente si ha

$$\lim_{t \to -R_\alpha^+} u_\alpha(t) = +\infty\,.$$

Sia ora $-1 < \alpha < 1$. Poichè u_α è decrescente in $(0, +\infty)$ si ha che

$$\ell := \lim_{t \to +\infty} u_\alpha(t) \in [-1, 1)\,.$$

Dimostriamo che $\ell = -1$. Se fosse $\ell > -1$ si avrebbe

$$\lim_{t \to +\infty} u'_\alpha(t) = \lim_{t \to +\infty} t \sinh(u_\alpha^2(t) - 1) = \lim_{t \to +\infty} [(\sinh(\ell^2 - 1))t + o(t)] = -\infty$$

e quindi

$$\ell = \lim_{t \to +\infty} u_\alpha(t) = \alpha + \lim_{t \to +\infty} \int_0^t u'_\alpha(s)\, ds = -\infty\,,$$

contraddizione.

Analogamente si dimostra che

$$\lim_{t \to -\infty} u_\alpha(t) = -1\,.$$

Infine per $\alpha < -1$ si ha che

$$\ell = \lim_{t \to +\infty} u_\alpha(t) \in (-\infty, -1]\,.$$

Dimostriamo che $\ell = -1$. Basta supporre per assurdo che $\ell < -1$ e procedere come nel precedente caso. Analogamente si dimostra che

$$\lim_{t \to -\infty} u_\alpha(t) = -1\,.$$

I casi $\alpha = \pm 1$ sono ovvi.