Analisi Matematica II — 23 luglio 2012

La durata dell'esame è di **180** *min. Nessuna calcolatrice grafica è consentita.*

Si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Si studi la differenziabilità in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^3\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

È evidente che la funzione f sia differenziabile in ogni punto diverso da $(0,0)$ in quanto ammette infinite derivate parziali in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Resta da stabilire se f sia anche differenziabile in $(0,0)$.

Utilizzando la definizione di derivata parziale si verifica immediatamente che f ammette entrambe le derivate parziali in $(0,0)$ e inoltre $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Utilizzando la definizione di differenziabilità valutiamo il seguente limite

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2h_2^3\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\,. \tag{1}$$

Siccome

$$\lim_{\rho\to0^+}\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|\frac{\rho^5\cos^2\theta\sin^3\theta\sin(\rho^{-2})}{\rho}\right| = 0$$

allora il limite (1) esiste e vale 0.

Questo dimostra che f è differenziabile anche in $(0,0)$.

(2) Sia data la forma differenziale $\omega : \mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)'$ definita da

$$\omega(x,y,z) := (2xz\sin(xy) + x^2yz\cos(xy))\,dx + x^3z\cos(xy)\,dy + x^2\sin(xy)\,dz\,.$$

(i) Si dimostri che ω è esatta in $\mathbb{R}^3$ e se ne calcolino tutte le primitive.

(ii) Si calcoli $\int_\gamma \omega$ con $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) := \left(\pi\left(t+\tfrac{1}{2}\right), t^2, \sin\left(\tfrac{\pi t}{2}\right)\right) \qquad \text{per ogni } t\in[1,2]\,.$$

(i) È possibile verificare che ω è chiusa in $\mathbb{R}^3$ ed è pertanto esatta essendo $\mathbb{R}^3$ un insieme stellato. Passiamo al calcolo della generica primitiva di ω. Detta $f = f(x, y, z)$ la generica primitiva allora si deve avere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xz\sin(xy) + x^2yz\cos(xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^3z\cos(xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x^2\sin(xy) \end{cases} \tag{2}$$

e pertanto dalla terza delle (2)

$$f(x, y, z) = \int x^2\sin(xy)\,dz + \alpha(x, y) = x^2z\sin(xy) + \alpha(x, y)$$

con $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzione differenziabile opportuna. Inoltre dalla prima delle (2) si ottiene

$$2xz\sin(xy) + x^2yz\cos(xy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xz\sin(xy) + x^2yz\cos(xy) + \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, y)\,.$$

Da quest'ultima identità ricaviamo $\frac{\partial \alpha}{\partial x} \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2$.
D'altra parte dalla seconda delle (2) si ha anche

$$x^3z\cos(xy) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^3z\cos(xy) + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, y)$$

da cui si ricava immediatamente $\frac{\partial \alpha}{\partial y} \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2$.
Possiamo concludere che $\nabla\alpha \equiv (0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$ e quindi α è una funzione costante.
Pertanto tutte e sole le primitive di ω sono le funzioni

$$f_c(x, y, z) = x^2z\sin(xy) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

(ii) Essendo ω esatta si ha

$$\int_\gamma \omega = f_0(\gamma(2)) - f_0(\gamma(1)) = f_0\left(\tfrac{5\pi}{2}, 4, 0\right) - f_0\left(\tfrac{3\pi}{2}, 1, 1\right) = \frac{9}{4}\pi^2$$

con f_0 primitiva di ω corrispondente a $c = 0$.

(3) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$F(x, y, z) := (e^{xz} + \sin y, -yze^{xz} + z^3, x^2z + y^2) \qquad \text{per ogni } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e sia $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1\}$.

Si calcoli il flusso di F attraverso la superficie Σ e cioè $\int_\Sigma F \cdot \nu\, dS$ dove ν denota il versore normale a Σ esterno al dominio limitato Ω soddisfacente $\partial\Omega = \Sigma$ e dS denota il differenziale di superficie.

Grazie al Teorema della Divergenza si ha che

$$\int_\Sigma F\cdot\nu\, dS = \int_\Omega \mathrm{div} F(x,y,z)\, dxdydz = \int_\Omega x^2\, dxdydz\,.$$

Utilizzando il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\phi \\ y = \dfrac{\rho}{2}\sin\theta\sin\phi \\ z = \dfrac{\rho}{2}\cos\theta \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega x^2\, dxdydz &= \int_0^1\left(\int_0^\pi\left(\int_0^{2\pi}\rho^2\sin^2\theta\cos^2\phi\,\frac{\rho^2}{4}\sin\theta\, d\phi\right)d\theta\right)d\rho \\ &= \int_0^1\frac{\rho^4}{4}\,d\rho\cdot\int_0^\pi\sin^3\theta\, d\theta\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\, d\phi = \frac{\pi}{15}\,.\end{aligned}$$

(4) Sia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y,z) := y\arctan(xz) + x^2z - 1 \qquad \text{per ogni } (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

e sia $Z := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=0\}$.

(i) Si dimostri che esistono degli intorni I, J, K rispettivamente di $x=1$, $y=0$ e $z=1$ ed esiste una funzione $\varphi : I\times J\to K$ tale che

$$(x,y,z)\in Z\cap(I\times J\times K) \qquad \text{se e solo se} \qquad z=\varphi(x,y)\,.$$

(ii) Si determini l'equazione del piano tangente al grafico di φ nel punto $(1,0,1)$.

(i) È sufficiente applicare il Teorema di Dini: le ipotesi di tale teorema sono verificate in quanto

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1) = \left(\frac{xy}{1+x^2z^2}+x^2\right)\Big|_{(x,y,z)=(1,0,1)} = 1\neq 0\,.$$

(ii) L'equazione del piano tangente al grafico di φ nel punto richiesto sarà data da

$$z = 1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,0)y\,.$$

Si ha che

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1)} = -2\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,1)} = -\frac{\pi}{4}\,.$$

L'equazione del piano sarà allora data da

$$z = 1 - 2(x-1) - \frac{\pi}{4}y\,.$$

(5) Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = -t^3 u(t) \log(1 + e^{u(t)}) \\ u(0) = \alpha \, . \end{cases}$$

(i) Si studino esistenza e unicità locali delle soluzioni del problema di Cauchy al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Dopo averne stabilito la monotonia, si studi l'esistenza globale delle soluzioni del problema di Cauchy al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) La funzione $f(t, y) = -t^3 y \log(1+e^y)$ è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e sono pertanto verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy.

(ii) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ denotiamo con u_α la corrispondente soluzione del problema di Cauchy. Si osservi prima di tutto che per $\alpha = 0$ la corrispondente soluzione u_α è costantemente nulla su tutta la retta reale.
Sia ora $\alpha > 0$. Grazie al teorema di unicità locale, il grafico della funzione u_α non può intersecare l'asse delle x in quanto $u_0 \equiv 0$ è una soluzione dell'equazione differenziale e si verrebbe a violare l'unicità locale.
Pertanto $u_\alpha(t) > 0$ per ogni $t \in I_\alpha$ dove con I_α abbiamo denotato l'intervallo massimale di esistenza di u_α.
Da ciò si deduce che u_α è decrescente in $I_\alpha \cap [0, +\infty)$ e crescente in $I_\alpha \cap (-\infty, 0]$.
Pertanto da quanto dedotto sulla monotonia di u_α e dal fatto che u_α è limitata dal basso si deduce che $I_\alpha = \mathbb{R}$.
Analogamente si può dedurre che $I_\alpha = \mathbb{R}$ anche per ogni $\alpha < 0$.