Analisi Matematica II — 18 settembre 2012

La durata dell'esame è di **180** *min. Nessuna calcolatrice grafica è consentita.*

Si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Determinare e classificare tutti i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \log(1+x^2e^y) - \frac{4}{5}x - \frac{4}{5}y \qquad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Dalla definizione di punto critico si deduce che il generico punto critico (x,y) della funzione f deve soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2xe^y}{1+x^2e^y} - \dfrac{4}{5} = 0 \\ \dfrac{x^2e^y}{1+x^2e^y} - \dfrac{4}{5} = 0\,. \end{cases}$$

Dalle due precedenti equazioni si ricava

$$\frac{2xe^y}{1+x^2e^y} = \frac{x^2e^y}{1+x^2e^y}$$

o più semplicemente $2xe^y = x^2e^y$. Semplificando si ottiene $x^2 - 2x = 0$ e infine $x = 0$ oppure $x = 2$.

Il caso $x = 0$ non produce alcuna soluzione come si vede andando a sostituire nella prima equazione.

Rimane da considerare il caso $x = 2$. Sostituendo nella prima equazione si ottiene

$$\frac{4e^y}{1+4e^y} = \frac{4}{5}\,.$$

Da quest'ultima equazione si ricava facilmente che deve essere $y = 0$.

In conclusione l'unico punto di critico di f è $(2,0)$.

Per determinare la natura di questo punto critico passiamo al calcolo delle derivate seconde di f. Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2e^y(1-x^2e^y)}{(1+x^2e^y)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{2xe^y}{(1+x^2e^y)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2e^y}{(1+x^2e^y)^2}\,.$$

La matrice Hessiana di f calcolata nel punto $(2,0)$ risulta quindi essere

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{6}{25} & \dfrac{4}{25} \\ \dfrac{4}{25} & \dfrac{4}{25} \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante è negativo e quindi gli autovalori sono necessariamente discordi. Possiamo concludere che $(2,0)$ è un punto di sella.

(2) Sia data la forma differenziale $\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to (\mathbb{R}^2)'$ definita da

$$\omega(x,y) := \frac{y}{4x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{4x^2+y^2}\,dy\,.$$

(i) Si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è la curva definita da

$$\gamma(t) = (\frac{1}{2}\cos t, \sin t) \qquad \text{per ogni } t \in [0,2\pi]\,.$$

(ii) Si studi l'esattezza di ω e di $\omega_{|A}$ dove $\omega_{|A}$ denota la restrizione di ω all'insieme

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}\,.$$

Nel caso in cui ω oppure $\omega_{|A}$ risultassero esatte se ne calcolino tutte le primitive.

(i) Utilizzando la definizione di integrale di linea per una forma differenziale si ottiene

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin t\left(-\frac{1}{2}\sin t\right)}{4\left(\frac{1}{2}\cos t\right)^2 + \sin^2 t} - \frac{\frac{1}{2}\cos^2 t}{4\left(\frac{1}{2}\cos t\right)^2 + \sin^2 t} \right) dt = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\,dt = -\pi\,.$$

(ii) Dal punto (i) si deduce che ω non può essere esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ in quanto l'integrale sulla curva γ è diverso da zero. Tuttavia mediante calcolo diretto è possibile verificare che ω è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e tale risulta essere anche la sua restrizione all'insieme A. Essendo A semplicemente connesso si deduce $\omega_{|A}$ è esatta.
A questo punto si devono determinare tutte le primitive di $\omega_{|A}$. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ la generica primitiva di $\omega_{|A}$. Si ha pertanto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{4x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x}{4x^2+y^2}\,. \end{cases}$$

Integrando ad esempio la seconda identità si ottiene

$$f(x,y) = \int -\frac{x}{4x^2+y^2}\,dy = -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{2x}\right) + \alpha(x)\,.$$

Utilizzando quest'ultima identità e la prima delle due identità ottenute precedentemente si ottiene

$$\frac{y}{4x^2+y^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{4x^2+y^2} + \alpha'(x)\,.$$

Questo significa che la funzione α è costante. In conclusione le primitive di $\omega_{|A}$ sono della forma

$$f_c(x,y) = -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{2x}\right) + c \qquad \text{per ogni } (x,y) \in A$$

con c costante arbitraria.

(3) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_T xe^y\,dxdy\,.$$

dove $T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}x < y < \sqrt{3}x \ \text{ e } \ 1 < x^2+y^2 < 4\}$.

Passando a coordinate polari si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_T xe^y\,dxdy &= \int_{(1,2)\times\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)} \rho\cos\theta\, e^{\rho\sin\theta}\rho\,d\rho d\theta = \int_1^2 \rho\left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \rho\cos\theta\, e^{\rho\sin\theta}d\theta\right)d\rho \\
&= \int_1^2 \rho\left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\rho} - e^{\frac{\rho}{2}}\right)d\rho = \left[\rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\rho} - 2e^{\frac{\rho}{2}}\right)\right]_1^2 - \int_1^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\rho} - 2e^{\frac{\rho}{2}}\right)d\rho \\
&= \left[\rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\rho} - 2e^{\frac{\rho}{2}}\right)\right]_1^2 - \left[\frac{4}{3}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\rho} - 4e^{\frac{\rho}{2}}\right]_1^2 \\
&= \frac{4(\sqrt{3}-1)}{3}e^{\sqrt{3}} + \frac{2(2-\sqrt{3})}{3}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 2\sqrt{e}\,.
\end{aligned}$$

(4) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y,z) := \arctan(x+y+z-2) + z - \frac{\pi}{4} \qquad \text{per ogni } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

e sia $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}$.

(i) Si dimostri che esistono degli intorni I, J, K rispettivamente di $x = 1$, $y = 2$ e $z = 0$ ed esiste una funzione $\varphi : I \times J \to K$ tale che

$$(x,y,z) \in Z \cap (I \times J \times K) \qquad \text{se e solo se} \qquad z = \varphi(x,y)\,.$$

(ii) Si calcoli l'equazione del piano tangente al grafico della funzione φ nel punto $(1,2,0)$.

(i) È sufficiente applicare il Teorema di Dini: le ipotesi di tale teorema sono verificate in quanto

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,0) = \left(\frac{1}{1+(x+y+z-2)^2}+1\right)|_{(x,y,z)=(1,2,0)} = \frac{3}{2} \neq 0\,.$$

(ii) L'equazione del piano tangente al grafico di φ nel punto richiesto sarà data da

$$z = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,2)(y-2)\,.$$

Si ha che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,0)} = -\frac{1}{3}\,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,0)} = -\frac{1}{3}\,.$$

L'equazione del piano sarà allora data da

$$z = -\frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{3}(y-2)\,.$$

(5) Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -t^3\sqrt{1+e^{y(t)}} \\ y(0) = \alpha\,. \end{cases}$$

(i) Si dimostri che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione.
(ii) Si studi l'esistenza globale di soluzioni del problema di Cauchy al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Si consideri la funzione $f(t,y) = -t^3\sqrt{1+e^y}$. Poichè $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ allora f è localmente lipschitziana ed è pertanto possibile applicare il teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy.
(ii) Va osservato che la funzione f non è globalmente lipschitziana in $\mathbb{R}^2$ e non è pertanto possibile applicare il terorema di esistenza globale. Tuttavia è possibile dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la corrispondente soluzione del problema di Cauchy y_α è prolungabile a tutto $\mathbb{R}$.
Osserviamo che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione y_α risulta essere crescente in $(-\infty,0] \cap I_\alpha$ e decrescente in $[0,+\infty) \cap I_\alpha$ dove abbiamo denotato con I_α l'intervallo massimale di esistenza. In particolare y_α è limitata dall'alto in I_α e tale risulta essere la funzione $t \mapsto \sqrt{1+e^{y_\alpha(t)}}$ al variare di $t \in I_\alpha$. Questo è sufficiente a garantire l'esistenza globale della soluzione.
Infatti possiamo verificare che y_α può essere prolungata su tutto $\mathbb{R}$. Iniziamo a verificare che y_α è ben definita su tutto $[0,+\infty)$. Per assurdo sia $R_\alpha < +\infty$ tale che $I_\alpha \cap [0,+\infty) = [0,R_\alpha)$. Allora per quanto detto sopra la funzione $t \mapsto -t^3\sqrt{1+e^{y_\alpha(t)}}$ risulta essere limitata in $[0,R_\alpha)$ e quindi tale risulta essere anche y'_α. In particolare y'_α è integrabile su $[0,R_\alpha)$.

Di conseguenza si ha

$$\ell_\alpha := \lim_{t\to R_\alpha^-} y_\alpha(t) = \lim_{t\to R_\alpha^-} \left(\alpha + \int_0^t y'_\alpha(s)\,ds\right) = \alpha + \int_0^{R_\alpha} y'_\alpha(s)\,ds \in \mathbb{R}\,.$$

Grazie al Teorema di Esistenza e Unicità Locale applicato al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -t^3\sqrt{1+e^{y(t)}} \\ y(R_\alpha) = \ell_\alpha \end{cases}$$

è possibile prolungare y_α a destra di R_α e questo contraddice la definzione di R_α. In modo analogo è possibile verificare che y_α è prolungabile su tutto $(-\infty, 0]$.