Analisi Matematica 2 — 30 settembre 2013

La durata dell'esame è di **180** *min. Nessuna calcolatrice grafica è consentita.*

Si risolvano i seguenti quesiti.

(1) Sia $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \text{ e } y > \frac{1}{2}\right\}$. Determinare e classificare tutti i punti critici della funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \arctan(xy^2) - \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}y \qquad \text{per ogni } (x,y) \in A\,.$$

Dalla definizione di punto critico si deduce che il generico punto critico (x,y) della funzione f deve soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{1+x^2y^4} - \dfrac{1}{5} = 0 \\ \dfrac{2xy}{1+x^2y^4} - \dfrac{4}{5} = 0\,. \end{cases}$$

Dalle due precedenti equazioni si ricava

$$\frac{4y^2}{1+x^2y^4} = \frac{4}{5} = \frac{2xy}{1+x^2y^4}$$

o più semplicemente $4y^2 = 2xy$. Si ottiene quindi $y = 0$ oppure $x = 2y$.

Il caso $y = 0$ non produce alcuna soluzione come si vede andando a sostituire nella prima equazione.

Rimane da considerare il caso $x = 2y$. Sostituendo nella prima equazione si ottiene

$$\frac{y^2}{1+4y^6} = \frac{1}{5}\,.$$

Da quest'ultima equazione si ricava $4y^6 - 5y^2 + 1 = 0$. Ponendo $z = y^2$ si ottiene l'equazione di terzo grado in z, $4z^3 - 5z + 1 = 0$ le cui soluzioni sono $z = 1$, $z = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ e $z = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$. Ma essendo $z = y^2 \geq 0$ si ricavano le soluzioni dell'equazione di partenza $y = \pm 1$ e $y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

Tuttavia $-1 < \frac{1}{2}$, $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} < \frac{1}{2}$, $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} < \frac{1}{2}$ e in conclusione la funzione f ammette in A esattamente un punto critico e cioè $(2,1)$. Per determinare la natura di questo punto critico passiamo al calcolo delle derivate seconde di f. Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{2xy^6}{(1+x^2y^4)^2}\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{2y(1-x^2y^4)}{(1+x^2y^4)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x(1-3x^2y^4)}{(1+x^2y^4)^2}\,.$$

La matrice Hessiana di f calcolata nel punto $(2,1)$ risulta quindi essere

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{4}{25} & -\dfrac{6}{25} \\ -\dfrac{6}{25} & -\dfrac{44}{25} \end{pmatrix} .$$

Il suo determinante è positivo ma il primo termine in alto a sinistra è negativo e quindi gli autovalori sono negativi. Possiamo concludere che $(2,1)$ è un punto di massimo locale.

(2) Sia $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) := \sqrt{2x} + y\sqrt{1+y^2}$. Si calcoli

$$\int_\gamma f\, ds$$

dove $\gamma : [1,2] \to A$ è la curva definita da

$$\gamma(t) := \left(\frac{t^2}{2}, \sinh t\right) \qquad \text{per ogni } t \in [1,2]$$

e ds denota il differenziale d'arco.

Utilizzando la definizione di integrale di linea rispetto al differenziale d'arco si ha

$$\int_\gamma f\, ds = \int_1^2 \left(t + \sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t}\right) \sqrt{t^2+\cosh^2 t}\, dt = \int_1^2 (t + \sinh t \cosh t)\sqrt{t^2+\cosh^2 t}\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}(t^2+\cosh^2 t)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left[(4+\cosh^2 2)^{3/2} - (1+\cosh^2 1)^{3/2}\right] .$$

(3) Si calcoli il seguente integrale:

$$\int_T xe^y\, dxdy\, .$$

dove $T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x| \ \text{ e } \ 1 < x^2+y^2 < 4\}$.

Dal fatto che il dominio di integrazione è simmetrico rispetto all'asse y e che la funzione f è dispari rispetto alla variabile x si può dedurre immediatamente che l'integrale vale 0.

In alternativa si può procedere con il calcolo passando in coordinate polari e utilizzando il teorema di riduzione degli integrali doppi.

$$\int_T xe^y\,dxdy = \int_{(1,2)\times\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)} \rho\cos\theta\, e^{\rho\sin\theta}\rho\,d\rho d\theta = \int_1^2 \rho\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \rho\cos\theta\, e^{\rho\sin\theta} d\theta\right) d\rho$$

$$= \int_1^2 \rho\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\rho} - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\rho}\right) d\rho = 0\,.$$

(4) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y,z) := \arctan(x+y-z-2) + z - \frac{\pi}{4} \qquad \text{per ogni } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

e sia $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}$.

(i) Si dimostri che esistono degli intorni I, J, K rispettivamente di $x = 2$, $y = 1$ e $z = 0$ ed esiste una funzione $\varphi : I \times J \to K$ tale che

$$(x,y,z) \in Z \cap (I \times J \times K) \qquad \text{se e solo se} \qquad z = \varphi(x,y)\,.$$

(ii) Si calcoli l'equazione del piano tangente al grafico della funzione φ nel punto $(2,1,0)$.

(i) È sufficiente applicare il Teorema di Dini: le ipotesi di tale teorema sono verificate in quanto

$$\frac{\partial f}{\partial z}(2,1,0) = \left(-\frac{1}{1+(x+y-z-2)^2} + 1\right)\Big|_{(x,y,z)=(2,1,0)} = \frac{1}{2} \neq 0\,.$$

(ii) L'equazione del piano tangente al grafico di φ nel punto richiesto sarà data da

$$z = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(2,1)(x-2) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(2,1)(y-1)\,.$$

Si ha che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(2,1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(2,1,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(2,1,0)} = -1\,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(2,1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(2,1,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(2,1,0)} = -1\,.$$

L'equazione del piano sarà allora data da

$$z = -(x-2) - (y-1)\,.$$

(5) Si calcoli esplicitamente la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'''' + y'' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = -1\,. \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2$ ammette la radice doppia $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e le radici complesse coniugate $\lambda_3 = i$ e $\lambda_4 = -i$. La soluzione generale dell'equazione differenziale sarà quindi data da

$$y(t) = A + Bt + C\cos t + D\sin t$$

con A, B, C, D costanti arbitrarie.

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B + D = 2 \\ -C = 0 \\ -D = -1\,. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si ottiene $A = B = D = 1$ e $C = 0$. In conclusione la soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y(t) = 1 + t + \sin t\,.$$