

# Metodi Matematici 2 A

1<sup>a</sup> Prova Parziale - Matematica Finanziaria

10 novembre 2009

TEST

Cognome

Nome

Matricola

Rispondere alle dieci domande sbarrando, nel caso di risposta multipla, la casella che si ritiene corretta (una sola risposta è corretta). Si indichi la risposta ma non il procedimento in caso di risposta aperta. Nel caso si intenda annullare una risposta cerchiare la corrispondente casella. CIFRE CORRETTE AL SECONDO DECIMALE, TASSI IN FORMA PERCENTUALE. Tempo a disposizione: 50 minuti.

**1** - Dato un tasso di sconto del 5% mensile, qual è il tasso di sconto semestrale ad esso equivalente (regime sconto commerciale)?

R:

**2** - Si impiega un capitale di €10000 per i primi tre mesi ad interesse semplice del 5% annuo. Per i successivi quattro mesi le condizioni finanziarie prevedono che il tasso sia del 9% composto annuo. Si determini il montante dell'operazione dopo sette mesi.

R:

**3** - La seguente tabella illustra le quotazioni e l'imposta sostitutiva relativi ad un BOT durante la sua vita, dall'emissione (tempo 0) al rimborso finale (12 mesi dopo l'emissione). Dato che lo si è acquistato 2 mesi dopo l'emissione e, dopo averlo detenuto per 3 mesi, si è deciso di rivenderlo determinare il rendimento dell'operazione al netto delle tasse.

Tempo (mesi)	0	2	3	5	12
Prezzo	90	92	93	95	100
IS	1.25	1.04166	0.93750	0.83333	0

R:

**4** - Si **vende** un CTZ con scadenza residua 5 mesi al prezzo di 95. All'emissione, 10 mesi prima, il prezzo era stato di 91. Il rendimento composto annuo ex-post al **lordo** delle tasse è (si prescinda dalle convenzioni di calcolo dei tempi):

R:

**5** - Si ammortizza su di un orizzonte di 5 anni, con il metodo **italiano** un debito di ammontare €100 000 con **rate trimestrali** posticipate ad un tasso  $j_4 = 8\%$ . L'importo dell'ultima rata è

R:

**6** - Il **prezzo secco** di un'obbligazione a cedola nominale del 6%, pagamenti **semestrali**, scadenza 8 mesi è 100. Si determini il fattore di sconto a 8 mesi, nota la struttura per scadenza dei tassi semplici in tabella. Si prescinda dagli aspetti fiscali.

Tempo (mesi)	2	4	6
Tasso	3%	3.5%	4%

**R:**

**7** - Determinare il canone mensile in un contratto di leasing della durata di un anno in cui il valore del bene ceduto ammonta a €50000, l'anticipo e il riscatto sono pari al 10% del valore del bene e il tasso  $j_{12} = 12\%$ :

**R:**

**8** - Le prime due righe della tabella seguente illustrano la struttura per scadenza dei tassi LIBOR nel mercato monetario. Nella terza riga troviamo i flussi di cassa che dovremmo ricevere, se positivi, o pagare, se negativi alle diverse date. Determinare il valore attuale dell'intero portafoglio.

Tempo (mesi)	2	4	6	9	12
Tasso	6%	3%	2%	1.3333%	1.0%
Flussi	300	-200	300	100	-500

**R:**

**9** - Si effettua un investimento di €500. Dopo 1 anno si incassano €300 e dopo 2 anni altri €400. Scrivere (senza risolvere) l'equazione la cui soluzione fornisce il TAEG dell'operazione, tenendo conto delle commissioni pari a 10 € che si pagano alle date 0, 1 e 2 anni.

**R:**

**10** - Un decisore con un costo opportunità del 8% ed un capitale disponibile di 10000 valuta la convenienza ad impiegare il proprio capitale in un investimento, eventualmente in modo congiunto all'attivazione di un finanziamento. Dopo l'esborso iniziale, l'investimento genera un flusso positivo annuo per i prossimi 20 anni pari a 700 €. Il finanziamento pari a 5000 € prevede delle rate di rimborso annue posticipate per i prossimi 5 anni per un importo pari a 1200 €. Determinare VAN e APV del progetto di investimento.

**a**] VAN= ; **b**] APV= ;

# Metodi Matematici 2

Prima prova parziale - Matematica Finanziaria  
10 novembre 2009

## Soluzioni Test

Domanda	Risultato
1	0.30
2	$\text{€}1042.006747 = 1000 \times \left(1 + 0.05 \times \frac{3}{12}\right) \times (1 + 0.09)^{\frac{4}{12}}$
3	$\frac{1}{\frac{3}{12}} \left( \frac{95+0.8333}{92+1.04166} - 1 \right) = 12.0018\%$
4	$\left(\frac{95}{91}\right)^{\frac{12}{10}} - 1 = 5.2976444 \%$
5	$\text{€}5100$
6	0.961309955
7	$\frac{50000-5000-5000 \times (1+0.01)^{-12}}{\frac{1-(1+0.01)^{-12}}{0.01}} = \text{€}3603.951547$
8	0
9	$-510 + 290 \times x + 390 \times x^2 = 0$ dove $x = \frac{1}{1+TAEG}$
10	VAN = $-10000 + 700 \times \frac{1-(1+0.08)^{-20}}{0.08} = -3127.297\text{€}$ , APV = $-3127.297 + 5000 - 1200 \times \frac{1-(1+0.08)^{-5}}{0.08} = -2918.549\text{€}$ .

# Metodi Matematici 2 A

1<sup>a</sup> Prova Parziale - Matematica Finanziaria

10 novembre 2009

TEST

## SOLUZIONI

**1** - Dato un tasso di sconto del 5% mensile, qual è il tasso di sconto semestrale ad esso equivalente (regime sconto commerciale)?

**R: 0.30.** Si ha  $d_2 = 6 \times d_{12} = 6 \times 0.05 = 0.3$ .

**2** - Si impiega un capitale di €10000 per i primi tre mesi ad interesse semplice del 5% annuo. Per i successivi quattro mesi le condizioni finanziarie prevedono che il tasso sia del 9% composto annuo. Si determini il montante dell'operazione dopo sette mesi.

**R: 1042.006747.** Si ha  $M = 1000 \times (1 + 0.05 \times \frac{3}{12}) \times (1 + 0.09)^{\frac{4}{12}}$ .

**3** - La seguente tabella illustra le quotazioni e l'imposta sostitutiva relativi ad un BOT durante la sua vita, dall'emissione (tempo 0) al rimborso finale (12 mesi dopo l'emissione). Dato che lo si è acquistato 2 mesi dopo l'emissione e, dopo averlo detenuto per 3 mesi, si è deciso di rivenderlo determinare il rendimento dell'operazione al netto delle tasse.

**R: 0.120018.** Dalla tabella si ha che il prezzo di acquisto ammonta a  $93.04166 = (92 + 1.04166)$ , mentre il prezzo di vendita (5 mesi dopo l'emissione e 3 mesi dopo l'acquisto) è pari a  $95.83333 = (95 + 0.83333)$ . Il rendimento netto è quindi

$$\frac{1}{\frac{3}{12}} \left( \frac{95.83333}{93.04166} - 1 \right) = 0.072010748.$$

n.b. nel testo l'IS dovrebbe essere pari a 0.72916 e non a 0.8333.

**4** - Si **vende** un CTZ con scadenza residua 5 mesi al prezzo di 95. All'emissione, 10 mesi prima, il prezzo era stato di 91. Il rendimento composto annuo ex-post al **lordo** delle tasse è (si prescinda dalle convenzioni di calcolo dei tempi):

**R:0.052976444.** Il rendimento lordo è pari

$$\left( \frac{95}{91} \right)^{\frac{12}{10}} - 1 = 0.052976444.$$

**5** - Si ammortizza su di un orizzonte di 5 anni, con il metodo **italiano** un debito di ammontare €100 000 con **rate trimestrali** posticipate ad un tasso  $j_4 = 8\%$ . L'importo dell'ultima rata è

**R:5100 €.** Le quote capitali sono costanti e pari a 5000 €. Il debito residuo all'inizio dell'ultimo periodo, per via della condizione di chiusura elementare, risulta pure di ammontare 5000 €. Quindi l'ultima quota interesse ammonta a  $I_{20} = \frac{jm}{m} \times D_{19} = \frac{0.08}{4} \times 5000 = 100€$ . Quindi l'ultima rata risulta essere pari a  $R_{20} = C_{20} + I_{20} = 5100 €$ .

**6** - Il **prezzo secco** di un'obbligazione a cedola nominale del 6%, pagamenti **semestrali**, scadenza 8 mesi è 100. Si determini il fattore di sconto a 8 mesi, nota la struttura per scadenza dei tassi semplici in tabella. Si prescinda dagli aspetti fiscali.

**R: 0.961309955.** Il corso tel-quel del titolo é pari a  $100 + \frac{4}{6} \times 3 = 102$ . Il fattore di sconto  $\phi = P(0, \frac{8}{12})$  a 8 mesi deve risolvere l'equazione

$$102 = \frac{3}{1 + 0.03 \times \frac{2}{12}} + 103 \times \phi.$$

Si ha quindi:

$$\phi = \frac{\left(102 - \frac{3}{1 + 0.03 \times \frac{2}{12}}\right)}{103} = \frac{99.01492537}{103} = 0.961309955.$$

**7 -** Determinare il canone mensile in un contratto di leasing della durata di un anno in cui il valore del bene ceduto ammonta a €50000, l'anticipo e il riscatto sono pari al 10% del valore del bene e il tasso  $j_{12} = 12\%$ :

**R: 3603.951547.** Il canone é pari a

$$\begin{aligned} C &= \frac{50000 - 0.1 \times 50000 - 0.1 \times 50000 \times (1 + 0.01)^{-12}}{a_{12|0.01}} \\ &= \frac{50000 - 5000 - 4437.246}{11.25508} \\ &= \frac{40562.75387}{11.25508} \\ &= 3603.951547. \end{aligned}$$

**8 -** Le prime due righe della tabella seguente illustrano la struttura per scadenza dei tassi LIBOR nel mercato monetario. Nella terza riga troviamo i flussi di cassa che dovremmo ricevere, se positivi, o pagare, se negativi alle diverse date. Determinare il valore attuale dell'intero portafoglio.

**R: 0.** Abbiamo

$$VA = \frac{300}{1 + 0.06 \times \frac{2}{12}} + \frac{-200}{1 + 0.03 \times \frac{4}{12}} + \frac{300}{1 + 0.02 \times \frac{6}{12}} + \frac{100}{1 + 0.01333 \times \frac{9}{12}} + \frac{-500}{1 + 0.01 \times \frac{12}{12}}.$$

Abbiamo quindi:

$$VA = \frac{300 - 200 + 300 + 100 - 500}{1 + 0.01} = 0.$$

**9 -** Si effettua un investimento di €500. Dopo 1 anno si incassano €300 e dopo 2 anni altri €400. Scrivere (senza risolvere) l'equazione la cui soluzione fornisce il TAEG dell'operazione, tenendo conto delle commissioni pari a 10 € che si pagano alle date 0, 1 e 2 anni.

**R:**  $-510 + 290 \times x + 390 \times x^2 = 0$ , dove  $x = \frac{1}{1+TAEG}$ . Il TAEG (il cui calcolo non é richiesto) risulta essere pari a 0.20385. Dare l'espressione del VAN, cioè  $-510 + 290 \times x + 390 \times x^2$ , senza imporre l'uguaglianza a zero é contato come errore.

**10** - Un decisore con un costo opportunità del 8% ed un capitale disponibile di 10000 valuta la convenienza ad impiegare il proprio capitale in un investimento, eventualmente in modo congiunto all'attivazione di un finanziamento. Dopo l'esborso iniziale, l'investimento genera un flusso positivo annuo per i prossimi 20 anni pari a 700 €. Il finanziamento pari a 5000 € prevede delle rate di rimborso di 1200 € annui posticipate per i prossimi 5 anni. Determinare VAN e APV del progetto di investimento.

**R:**  $VAN = -10000 + 700 \times a_{20|0.08} = -10000 + 700 \times 9.818147407 = -3127.296815$ .

**R:**  $APV = -3127.296815 + 5000 - 1200 \times a_{5|0.08} = -3127.296815 + 5000 - 1200 \times 3.99271 = -3127.296815 + 208.7479555 = -2918.548859$ .

<b>Metodi Matematici 2 A</b>		<b>10 novembre 2009</b>
<b>1<sup>a</sup> Prova Parziale - Matematica Finanziaria</b>		<b>Parte B.</b>
<b>Cognome</b>	<b>Nome</b>	<b>Matricola</b>

Sul mercato sono trattati tre titoli, tutti con **stacco annuo** delle cedole.

- Il primo titolo ha una vita residua di 1 anno, una cedola del 5% ed una quotazione pari a 100. Determinare il fattore di sconto a 1 anno.
- Il secondo titolo ha una vita residua di 2 anni, una cedola annua del 6% ed una quotazione pari a 100. Determinare il fattore di sconto a 2 anni, tenendo conto della risposta data al punto precedente.
- Il terzo titolo ha una vita residua di 3 anni, una cedola annua del 7% ed una quotazione pari a 100. Determinare il fattore di sconto a 3 anni, tenendo conto della risposta data ai punti precedenti.

Date le informazioni ai punti precedenti, un investitore considera un progetto di investimento i cui flussi sono dati nella seguente tabella.

<i>Epoche</i>	0	1	2	3
<i>Flussi</i>	-40000	15000	25000	5000

- Calcolare il VAN dell'investimento usando le informazioni sui fattori di sconto contenute nelle quotazioni dei titoli di cui sopra. Stabilire inoltre se il TIR dell'investimento è maggiore o minore del 6% sapendo che il VAN calcolato al costo opportunità del 6% è pari a circa 598 €.
- L'eventuale fabbisogno di fondi può essere risolto con un finanziamento di 20000 € che è ripagato mediante un ammortamento italiano in 2 rate annue posticipate al tasso del 4%. Determinare l'APV del progetto e la scala  $\alpha$ , con  $0 \leq \alpha \leq 1$ , ottima del finanziamento.
- Se il finanziamento fosse invece con ammortamento alla francese con rata costante R, determinare R in modo che l'APV del progetto sia pari ad almeno 500 €.
- Nel caso l'APV risulti essere pari proprio a 500 €, senza ulteriori calcoli, stabilire se il tasso del nuovo debito risulta essere maggiore o minore del 4%.

**- SOLUZIONE -**

- I tre fattori di sconto ad 1, 2 e 3 anni possono essere determinati imponendo che siano soddisfatte le seguenti condizioni

$$\begin{aligned} 100 &= 105 \times P(0, 1); \\ 100 &= 6 \times P(0, 1) + 106 \times P(0, 2); \\ 100 &= 7 \times P(0, 1) + 7 \times P(0, 2) + 107 \times P(0, 3); \end{aligned}$$

Risolvendo partendo dalla prima equazione troviamo

$$P(0, 1) = \frac{100}{105} = 0.952380952. \quad (1)$$

Quindi

$$P(0, 2) = \frac{100 - 6 \times 0.952380952}{106} = 0.889487871, \quad (2)$$

ed infine

$$P(0, 3) = \frac{100 - 7 \times (0.952380952 + 0.889487871)}{107} = 0.814083348. \quad (3)$$

Data la struttura dei fattori di sconto possiamo calcolare il VAN del primo investimento

$$\begin{aligned} VAN &= -40000 + 15000 \times P(0, 1) + 25000 \times P(0, 2) + 5000 \times P(0, 3) \\ &= -40000 + 15000 \times 0.952380952 + 25000 \times 0.889487871 + 5000 \times 0.814083348 \\ &= -40000 + 14285.71429 + 22237.19677 + 4070.41674 \\ &= 593.327795. \end{aligned}$$

- Trattandosi di un investimento in senso stretto (prima ci sono i pagamenti e poi gli incassi) il VAN è funzione decrescente del tasso. Dunque il tasso che annulla il VAN non può che essere superiore al 6.00%, dal momento che il testo ci informa che per quest'ultimo valore del tasso il VAN è ancora positivo.



- Il finanziamento viene ripagato mediante due rate di importo rispettivamente

$$R_1 = C_1 + I_1 = 10000 + 0.04 \times 20000 = 10800,$$

e

$$R_2 = C_2 + I_2 = 10000 + 0.04 \times 10000 = 10400,$$

da cui possiamo calcolare il VAN del finanziamento

$$\begin{aligned} VAN_{fin} &= +20000 - 10800 \times P(0, 1) - 10400 \times P(0, 2) \\ &= +20000 - 10800 \times 0.952380952 - 10400 \times 0.889487871 \\ &= +20000 - 10285.71429 - 9250.673854 \\ &= 463.6118598. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$APV = 593.327795 + 463.6118598 = 1056.939651,$$

e poichè il finanziamento ha VAN positivo conviene attivare interamente il finanziamento.

- Se il finanziamento fosse con ammortamento alla francese con rata costante  $R$ , per determinare  $R$  in modo che l'APV del progetto sia pari ad almeno 500 €, dobbiamo risolvere la seguente disequazione rispetto a  $R$

$$APV = 593.327795 + 20000 - R \times (P(0, 1) + P(0, 2)) \geq 500.$$

da cui

$$R \leq \frac{20093.327795}{(P(0, 1) + P(0, 2))} = 10909.20675$$

cioè le rate non devono superare l'importo di 10909.20675 €.

- Poichè in questo caso le rate sono superiori rispetto al caso del finanziamento del 4%, il costo del debito risulterà ovviamente maggiore al 4% (in particolare risulta essere pari al 6.003%).