Metodi Matematici II

Simulazione Test (Seconda Parte) A.A. 2009-10

DOMANDA 1

Sia $A \in R^{3,3}$ e si sappia che il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha un'unica soluzione. Allora il sistema lineare $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$

$\boxed{\text{a}}$ può non ammettere soluzioni ; $\boxed{\text{b}}$ è possibile ed ammette una sola soluzione;

$\boxed{\text{c}}$ è possibile ed ammette infinite soluzioni; $\boxed{\text{d}}$ non è possibile;

DOMANDA 2

Discutere il S.L.: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$

DOMANDA 3

Si è costruita una matrice A accostando m vettori di R^n. Allora:

$\boxed{\text{a}}$ $r(\mathbf{A}) \leq m$ se $n > m$; $\boxed{\text{b}}$ $r(\mathbf{A}) = n$;

$\boxed{\text{c}}$ $r(\mathbf{A}) = m$; $\boxed{\text{d}}$ $r(\mathbf{A}) = \max(n, m)$;

DOMANDA 4

Al variare di $\alpha \in R$, determinare il rango della matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix}$

DOMANDA 5

Un gestore che dispone di un capitale di 40 deve costruire un portafoglio immunizzato ad un fattore di rischio, sapendo che i due titoli hanno sensibilità ad un fattore di rischio di 5 e -3 e che i loro prezzi sono pari a 10. Le quantità da acquistare dei due titoli sono:

DOMANDA 6

Al variare di $\alpha \in R$, discutere il S.L. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \alpha \end{array}\right]$

DOMANDA 7

Se $\mathbf{A} \in R^{4,4}$ ha determinante pari a 5, calcolare $\det(2\mathbf{A})$ e $\det\left(2\mathbf{A}^{-1}\right)$.

DOMANDA 8

Se $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, allora: $\left((\mathbf{AB})^{-1}\right)^T$ ha elemento 2,2 pari a:

DOMANDA 9

Un gestore deve decidere quanto investire in due titoli che hanno sensibilità 5 e -3 ad un fattore di rischio. I due titoli hanno prezzo pari a 10. Obiettivo del gestore è replicare un indice di mercato che vale 10 e che ha sensibilità pari a 1 al fattore di rischio. Allora le quantità da acquistare dei due titoli sono:

DOMANDA 10

Due gestori hanno ottenuto rispettivamente una performance del 5% e dell'8% gestendo due portafogli descritti dalla seguente composizione: $fondo_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^T$, $fondo_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^T$. Indici di mercato puri hanno registrato una performance rispettivamente del 4% e del 10%. L'extraperformance dei due gestori è data da: $ex_1 = \ldots\ldots, ex_2 = \ldots\ldots.$

DOMANDA 11

Determinare l'unica soluzione del seguente sistema lineare: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

è:

DOMANDA 12

Discutere il Sistema Lineare Omogeneo con matrice dei coefficienti $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$:

DOMANDA 13

Sia $\mathbf{A} \in R^{3,3}$ e si sappia che il sistema lineare $\mathbf{A}x = 0$ ha ∞^2 soluzioni. Allora il sistema lineare $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$: $\boxed{\text{a}}$ è sempre possibile; $\boxed{\text{b}}$ è possibile se $r(\mathbf{A}|b) = 1$ $\boxed{\text{c}}$ ammette ∞^2 soluzioni, $\forall b$; $\boxed{\text{d}}$ è sempre impossibile, $\forall b$;

DOMANDA 14

Sia $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Calcolare la componente $(1, 2)$ della matrice prodotto $(\mathbf{AB})^T$.

DOMANDA 15

Calcolare la matrice inversa di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

DOMANDA 16

Dato che la matrice A ha inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, il sistema lineare $Ax = b$, dove $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ha soluzione.

DOMANDA 17

La funzione $f(x) : R^3 \to R$ data da $f(\mathbf{x}) = x_1 x_3 + \log(x_1 x_2)$ ha gradiente nel punto $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

DOMANDA 18

La funzione $f(x) : R^3 \to R$ data da $f(\mathbf{x}) = x_1 x_3 + \log(x_1 x_2)$ ha matrice Hessiana nel punto $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

DOMANDA 19

In un problema di ottimo vincolato, la matrice Hessiana della funzione obiettivo nel punto stazionario x_0 è data da

$$H_f(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Discutere la natura del punto stazionario.

DOMANDA 20

Data la funzione $f(x) = x'Ax + b'x + c$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, c = 1$$

ha punti stazionari che sono soluzioni del SL (scrivere il SL da risolvere, senza risolverlo)

DOMANDA 21

Il vettore

$$x_0 = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}'$$

è punto stazionario della funzione nella domanda precedente?

DOMANDA 22

Dato un problema di ottimo vincolato (con 1 vincolo di uguaglianza), la matrice hessiana orlata (hessiana della funzione Lagrangiana) in un punto stazionario è data da

$$H_L(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinare la natura del punto stazionario (sella, max vinc., min vinc., boh).

DOMANDA 23

Dato il problema di ottimo vincolato (qui $A \in R^{5,5}, b \in R^5, c \in R$)

$$\begin{aligned} & ott. x'Ax + b'x + c \\ sub\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

scrivere la funzione Lagrangiana.

DOMANDA 23

Mediante il metodo per sostituzione, risolvere, se possibile, il problema di ottimo vincolato

$$\begin{aligned} & ott. x_1 x_3 + \log(x_1 + x_2) \\ sub\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

DOMANDA 24

Scrivere la funzione Lagrangiana del problema di ottimo vincolato

$$\begin{aligned} & ott. x_1 x_3 + \log(x_1 + x_2) \\ sub\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

DOMANDA 25

Determinare i punti stazionari e il moltiplicatore della funzione Lagrangiana associati al problema di ottimo vincolato della domanda precedente.

DOMANDA 26

Determinare, attraverso la condizione sulla matrice hessiana orlata, se i punti stazionari della funzione Lagrangiana del punto precedente consentono di individuare un punto di ottimo del problema vincolato.

DOMANDA 27

Determinare, attraverso l'utilizzo delle curve di livello, l'eventuale soluzione del seguente problema di ottimo:

$$\begin{array}{rcl} & & \max x_1 + x_2 \\ & & sub \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 0 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 0 \\ x_1 & \geq & 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$