Metodi Matematici II

Simulazione Test (Seconda Parte) A.A. 2009-10

DOMANDA 1

Sia $A \in R^{3,3}$ e si sappia che il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha un'unica soluzione. Allora il sistema lineare $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$

$\boxed{\text{a}}$ può non ammettere soluzioni ; ; $\boxed{\text{b}}$ è possibile ed ammette una sola soluzione; ;

$\boxed{\text{c}}$ è possibile ed ammette infinite soluzioni; ; $\boxed{\text{d}}$ non è possibile;

DOMANDA 2

Discutere il S.L.: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$

DOMANDA 3

Si è costruita una matrice A accostando m vettori di R^n. Allora:

$\boxed{\text{a}}$ $r(\mathbf{A}) \leq m$ se $n > m$; $\boxed{\text{b}}$ $r(\mathbf{A}) = n$;

$\boxed{\text{c}}$ $r(\mathbf{A}) = m$; $\boxed{\text{d}}$ $r(\mathbf{A}) = \max(n, m)$;

DOMANDA 4

Al variare di $\alpha \in R$, determinare il rango della matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix}$

DOMANDA 5

Un gestore che dispone di un capitale di 40 deve costruire un portafoglio immunizzato ad un fattore di rischio, sapendo che i due titoli hanno sensibilità ad un fattore di rischio di 5 e -3 e che i loro prezzi sono pari a 10. Le quantità da acquistare dei due titoli sono:

DOMANDA 6

Al variare di $\alpha \in R$, discutere il S.L. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \alpha \end{array}\right]$

DOMANDA 7

Se $\mathbf{A} \in R^{4,4}$ ha determinante pari a 5, calcolare $\det(2\mathbf{A})$ e $\det\left(2\mathbf{A}^{-1}\right)$.

DOMANDA 8

Se $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, allora: $\left((\mathbf{AB})^{-1}\right)^T$ ha elemento 2,2 pari a:

DOMANDA 9

Un gestore deve decidere quanto investire in due titoli che hanno sensibilità 5 e -3 ad un fattore di rischio. I due titoli hanno prezzo pari a 10. Obiettivo del gestore è replicare un indice di mercato che vale 10 e che ha sensibilità pari a 1 al fattore di rischio. Allora le quantità da acquistare dei due titoli sono:

DOMANDA 10

Due gestori hanno ottenuto rispettivamente una performance del 5% e dell'8% gestendo due portafogli descritti dalla seguente composizione: $fondo_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^T$, $fondo_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^T$. Indici di mercato puri hanno registrato una performance rispettivamente del 4% e del 10%. L'extraperformance dei due gestori è data da: $ex_1 = ...$, $ex_2 = ...$

DOMANDA 11

Determinare l'unica soluzione del seguente sistema lineare: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

è:

DOMANDA 12

Discutere il Sistema Lineare Omogeneo con matrice dei coefficienti $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$:

DOMANDA 13

Sia $\mathbf{A} \in R^{3,3}$ e si sappia che il sistema lineare $\mathbf{A}x = 0$ ha ∞^2 soluzioni. Allora il sistema lineare $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$: $\boxed{\text{a}}$ è sempre possibile; $\boxed{\text{b}}$ è possibile se $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 1$ $\boxed{\text{c}}$ ammette ∞^2 soluzioni, $\forall \mathbf{b}$; $\boxed{\text{d}}$ è sempre impossibile, $\forall \mathbf{b}$;

DOMANDA 14

Sia $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Calcolare la componente $(1, 2)$ della matrice prodotto $(\mathbf{AB})^T$.

DOMANDA 15

Calcolare la matrice inversa di $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

DOMANDA 16

Dato che la matrice $\mathbf{A}$ ha inversa $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, il sistema lineare $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ha soluzione.

DOMANDA 17

La funzione $f(x) : R^3 \to R$ data da $f(\mathbf{x}) = x_1x_3 + \log(x_1x_2)$ ha gradiente nel punto $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

DOMANDA 18

La funzione $f(x) : R^3 \to R$ data da $f(\mathbf{x}) = x_1x_3 + \log(x_1x_2)$ ha matrice Hessiana nel punto $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

DOMANDA 19

In un problema di ottimo, la matrice Hessiana della funzione obiettivo nel punto stazionario x_0 è data da

$$H_f(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Discutere la natura del punto stazionario.

DOMANDA 20

Data la funzione $f(x) = x'\mathbf{A}x + \mathbf{b}'x + c$, dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, c = 1$$

ha punti stazionari che sono soluzioni del SL (scrivere il SL da risolvere, senza risolverlo)

DOMANDA 21

Il vettore

$$x_0 = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}'$$

è punto stazionario della funzione nella domanda precedente?

DOMANDA 22

Dato un problema di ottimo vincolato (con 1 vincolo di uguaglianza), la matrice hessiana orlata (hessiana della funzione Lagrangiana) in un punto stazionario è data da

$$H_L(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinare la natura del punto stazionario (sella, max vinc., min vinc., boh).

DOMANDA 23

Dato il problema di ottimo vincolato (qui $\mathbf{A} \in R^{5,5}, \mathbf{b} \in R^5, c \in R$)

$$\begin{aligned} & ott. x'\mathbf{A}x + \mathbf{b}'x + c \\ sub\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

scrivere la funzione Lagrangiana.

DOMANDA 23

Mediante il metodo per sostituzione, risolvere, se possibile, il problema di ottimo vincolato

$$\begin{aligned} & ott. x_1 x_3 + \log(x_1 + x_2) \\ sub\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

DOMANDA 24

Scrivere la funzione Lagrangiana del problema di ottimo vincolato

$$\begin{aligned} & ott. x_1 x_3 + \log(x_1 + x_2) \\ sub\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

DOMANDA 25

Determinare i punti stazionari e il moltiplicatore della funzione Lagrangiana associati al problema di ottimo vincolato della domanda precedente.

DOMANDA 26

Determinare, attraverso la condizione sulla matrice hessiana orlata, se i punti stazionari della funzione Lagrangiana del punto precedente consentono di individuare un punto di ottimo del problema vincolato.

DOMANDA 27

Determinare, attraverso l'utilizzo delle curve di livello, l'eventuale soluzione del seguente problema di ottimo:

$$\begin{array}{rcl} & & \max x_1 + x_2 \\ & & sub \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 0 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 0 \\ x_1 & \geq & 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Metodi Matematici II

Algebra Lineare e Calcolo Finanziario
Soluzioni Simulazione Test Prova Finale

DOMANDA 1

Sia $A \in R^{3,3}$ e si sappia che il sistema lineare $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ha un'unica soluzione. Allora il sistema lineare $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$

$\boxed{\text{a}}$ può non ammettere soluzioni ; $\boxed{\text{b}}$ è possibile ed ammette una sola soluzione;

$\boxed{\text{c}}$ è possibile ed ammette infinite soluzioni; $\boxed{\text{d}}$ non è possibile;

R. b.

Poichè il S.L. omogeneo ha una sola soluzione segie che $r(\mathbf{A}) = n = 3$. Di conseguenza $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$, $\forall \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$. e il S.L. non omogeneo è possibile ed ammette una sola soluzione.

DOMANDA 2

Discutere il seguente S.L.: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$.

R. Mediante eliminazione gaussiana con l'operazione R3=R3+R1 si arriva alla forma ridotta $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ da cui si deduce immediatamente che il SL è impossibile in quanto $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$ e $r(\mathbf{A}) = 2$.

DOMANDA 3

Si è costruita una matrice A accostando m vettori di R^n. Allora:

$\boxed{\text{a}}$ $r(\mathbf{A}) \leq m$ se $n > m$; $\boxed{\text{b}}$ $r(\mathbf{A}) = n$;

$\boxed{\text{c}}$ $r(\mathbf{A}) = m$; $\boxed{\text{d}}$ $r(\mathbf{A}) = \max(n, m)$;

R. La matrice $\mathbf{A}$ ha dimensione $m \times n$ e si sa che $r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$. Per cui l'unica risposta ammissibile è a.

DOMANDA 4

Al variare di $\alpha \in R$, determinare il rango della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{bmatrix}$

R. Il determinante della matrice è pari a $\alpha - 6$. Di conseguenza se $\alpha = 6$, si ha che il rango è 1, altrimenti è 2.

DOMANDA 5

Un gestore che dispone di un capitale di 40 deve costruire un portafoglio immunizzato ad un fattore di rischio, sapendo che i due titoli hanno sensibilità ad un fattore di rischio di 5 e -3 e che i loro prezzi sono pari a 10. La quantità da acquistare dei due titoli è:

R. $q_1 = 3/2$, $q_2 = 5/2$.

Si deve risolvere il S.L.

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che ha soluzione:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

DOMANDA 6

Al variare di $\alpha \in R$, discutere il S.L. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \alpha \end{array}\right]$.

R.

Con l'operazione elementare $R_3 = R_3 - R_2/3$ si ottiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array}\right]$$

per cui se $\alpha \neq 1$, il sistema è impossibile. Altrimenti è possibile con ∞^{3-2} soluzioni, date da

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2+4t \\ 1-2t \\ t \end{bmatrix}, t \in R.$$

DOMANDA 7

Se $A \in R^{4,4}$ ha determinante pari a 5, calcolare $\det(2\mathbf{A})$ e $\det\left(2\mathbf{A}^{-1}\right)$.

R.

Si sa che

$$\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A}),$$

per cui

$$\det(2\mathbf{A}) = 2^4 \det(\mathbf{A}) = 2^4 \times 5.$$

Inoltre

$$\det\left(2\mathbf{A}^{-1}\right) = 2^n \det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = 2^n \frac{1}{\det(\mathbf{A})} = \frac{2^4}{5}.$$

DOMANDA 8

Se $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, allora: $\left((\mathbf{AB})^{-1}\right)^T$ ha elemento 2,2 pari a:

R. Si ha

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1},$$

per cui

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \left(\mathbf{B}^{-1}\right)^T.$$

Nel nostro esempio

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \left(\mathbf{B}^{-1}\right)^T &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

DOMANDA 9

Un gestore deve decidere quanto investire in due titoli che hanno sensibilità 5 e -3 ad un fattore di rischio. I due titoli hanno prezzo pari a 10. Obiettivo del gestore è replicare un indice di mercato che vale 10 e che ha sensibilità pari a 1 al fattore di rischio. Allora le quantità da acquistare dei due titoli sono:

R. Si deve risolvere il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

che ha soluzione:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-80} \begin{bmatrix} -3 & -10 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

DOMANDA 10

Due gestori hanno ottenuto rispettivamente una performance del 5% e dell'8% gestendo due portafogli descritti dalla seguente composizione: $fondo_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^T$, $fondo_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^T$. Indici di mercato puri hanno registrato una performance rispettivamente del 4% e del 10%. L'extraperformance dei due gestori è data da: $ex_1 = ...,ex_2 = ...$

R. $ex_1 = -3.8\%, ex_2 = 1\%$.

Poichè i benchmark di mercato sono indici puri, e quindi rispettivamente descritti dalle composizioni $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, i fondi gestiti possono essere facilmente ricostruiti come combinazione lineare dei fondi di mercato:

$$\begin{aligned} 0.2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.8 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix} \\ 0.5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La performance del primo fondo spiegata dal mercato è:

$$0.2 \times 4\% + 0.8 \times 10\% = 0.8\% + 8\% = 8.8\%$$

e quindi la extraperformance che misura la capacità del primo gestore è:

$$5\% - 8.8\% = -3.8\%,$$

addirittura negativa. La performance del secondo fondo spiegata dal mercato è:

$$0.5 \times 4\% + 0.5 \times 10\% = 2\% + 5\% = 7\%$$

e quindi la extraperformance che misura la capacità del secondo gestore è:

$$8\% - 7\% = 1\%.$$

DOMANDA 11

Determinare l'unica soluzione del seguente sistema lineare: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

è:

R. $\hat{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]^T$.

Attraverso la sequenza di operazioni elementare si ottiene

$R_3 = R_3 + R_1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]$

$R_1 = R_1/2$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]$

$R_1 = R_1 - R_2, R_3 = R_3 - 3R_1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right]$

$R_3 = R_3/(-3)$ :: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$

$R_1 = R_1 + R_3, R_2 = R_2 - 2R_3$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$

DOMANDA 12

Discutere il Sistema Lineare Omogeneo con matrice dei coefficienti $A=\left[\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$:

R. Il S.L. omogeneo ha ∞^{3-2} soluzioni, in quanto la matrice A ha rango pari a 2. Le infinite soluzioni sono date da

$$\mathbf{x} = \left[\begin{array}{c} -t \\ -t \\ t \end{array}\right] = t\left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right], t \in R.$$

DOMANDA 13

Sia $A \in R^{3,3}$ e si sappia che il sistema lineare $Ax = 0$ ha ∞^2 soluzioni. Allora il sistema lineare $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$: $\boxed{\text{a}}$ è sempre possibile; $\boxed{\text{b}}$ è possibile se $r(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 1$ $\boxed{\text{c}}$ ammette ∞^2 soluzioni, $\forall\mathbf{b}$; $\boxed{\text{d}}$ è sempre impossibile, $\forall\mathbf{b}$;

R.

Se il SL omogeneo ha ∞^2 soluzioni, significa che $r(\mathbf{A}) = 1$. Quindi la risposta corretta per il Teorema di Rouchè Capelli è la b).

DOMANDA 14

Sia $A^T = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right]$ e $\mathbf{B}^T = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$. Calcolare la componente $(1,2)$ della matrice prodotto $(\mathbf{AB})^T$.

R. 20

Si osserva che $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T A^T$ e che per calcolare la componente $(1,2)$ occorre considerare la prima riga di $\mathbf{B}$ e la seconda colonna di A. Per cui l'elemento desiderato è

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 20.$$

DOMANDA 15
Calcolare la matrice inversa di $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

R. $A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice A ha rango pieno e quindi è invertibile. La matrice inversa possiamo calcolarla ricordando la regola di inversione di matrici 2x2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

per cui

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{1-8}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Oppure possiamo risolvere il sistemone mediante eliminazione gaussiana

$$\left. \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} \right| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{I}}$$

$$\begin{array}{ll} R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 1 \end{array}\right] \\ R_2 \rightarrow R_2/(-7) & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right] \\ R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 & \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{I}} & \underbrace{\begin{matrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{matrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \end{array}\right]. \end{array}$$

Quindi la matrice inversa è data da

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

DOMANDA 16
Sia $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Risolvere il Sistema Lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} = [1\ 1]^T$.

R. Osserviamo che poichè è assegnata la matrice A^{-1}, allora il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha un'unica soluzione data da

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

DOMANDA 17

La funzione $f(x) : R^3 \to R$ data da $f(\mathbf{x}) = x_1 x_3 + \log(x_1 x_2)$ ha gradiente nel punto $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

R.

Si ha

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_3 + \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & x_1 \end{bmatrix},$$

e

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

DOMANDA 18

La funzione $f(x) : R^3 \to R$ data da $f(\mathbf{x}) = x_1 x_3 + \log(x_1 x_2)$ ha matrice Hessiana nel punto $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

R.

Si ha

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{x_2^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi

$$H_f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1^2} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

DOMANDA 19

In un problema di ottimo, la matrice Hessiana della funzione obiettivo nel punto stazionario x_0 è data da

$$H_f(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Discutere la natura del punto stazionario.

R.

I minori principali di NW della matrice sono dati da 1, -5 e 24. Di conseguenza la matrice hessiana calcolata in $\mathbf{x}_0$ è indefinita e $\mathbf{x}_0$ non può essere un estremo della funzione.

DOMANDA 20

Data la funzione $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' A\mathbf{x} + \mathbf{b}'\mathbf{x} + c$, dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, c = 1$$

ha punti stazionari che sono soluzioni del SL (scrivere il SL da risolvere, senza risolverlo).

R. Il SL che consente di individuare i punti stazionari è dato da

$$2\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}=\mathbf{0},$$

da cui

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=-\frac{\mathbf{b}}{2}.$$

DOMANDA 21

Il vettore

$$\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}'$$

è punto stazionario della funzione nella domanda precedente?

R. Se calcoliamo $A\mathbf{x}_0$, si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\neq-\frac{\mathbf{b}}{2},$$

e quindi non è un punto stazionario. Il punto stazionario è invece dato da

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} \end{bmatrix}.$$

DOMANDA 22

Dato un problema di ottimo vincolato (con 1 vincolo di uguaglianza), la matrice hessiana orlata (hessiana della funzione Lagrangiana) in un punto stazionario è data da

$$H_L(\mathbf{x}_0)=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinare la natura del punto stazionario (sella, max vinc., min vinc., boh).

R.

La determinazione dell'ottimo vincolato richiede di individuare un punto di sella della funzione Lagrangiana $L(x,\lambda)$. In particolare, condizione sufficiente di sella affinchè un punto $\left(\hat{x},\hat{\lambda}\right)$ sia di sella per L (e quindi che $\hat{x}$ sia un punto di ottimo vincolato) è

- che il gradiente della funzione Lagrangiana sia nullo (cioè che $\left(\hat{x},\hat{\lambda}\right)$ sia un punto stazionario per $L(x,\lambda)$;
- che gli ultimi $n-m$ minori principali di NW della matrice hessiana di L siano a a segni alterni cominciando con $(-1)^{m+1}$, ed in questo caso $\hat{x}$ sarebbe un punto di **massimo** locale vincolato, oppure

- che gli ultimi $n-m$ minori principali di NW della matrice hessiana di L siano a di segno $(-1)^m$, ed in questo caso $\hat{x}$ sarebbe un punto di **minimo** locale vincolato.

Qui occorre calcolare gli ultimi

$$n-m=2-1$$

minori principali di NW, cioè il determinante che è pari a 29, il cui segno è positivo, e coincide con quello di $(-1)^{m+1}=(-1)^2>0$. Quindi il punto $\mathbf{x}_0$ è un punto di **massimo vincolato**.

DOMANDA 23

Dato il problema di ottimo vincolato (qui $\mathbf{A}\in R^{5,5},\mathbf{b}\in R^5,c\in R$)

$$\begin{array}{rcl} & & ott.x'\mathbf{A}x+\mathbf{b}'x+c \\ sub\; x_1+x_2 & = & 1 \\ x_3+x_4 & = & 2 \end{array}$$

scrivere la funzione Lagrangiana.

R. La funzione Lagrangiana è data da

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}'\mathbf{x}+c+\boldsymbol{\lambda}\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right) \\ = & \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}'\mathbf{x}+c+\boldsymbol{\lambda}\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_3+x_4\end{bmatrix}\right), \end{aligned}$$

dove

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}.$$

[In particolare, il problema di ottimo vincolato

$$\begin{array}{rcl} & & ott\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}'\mathbf{x}+c \\ sub & : & \mathbf{C}\mathbf{x}=\mathbf{d} \end{array}$$

dove

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},\mathbf{d}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

ha funzione Lagrangiana

$$L(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})=\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}'\mathbf{x}+c+\lambda(\mathbf{d}-\mathbf{C}\mathbf{x}).$$

Le condizioni per la ricerca del pto stazionario sono

$$2\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}-\mathbf{C}'\boldsymbol{\lambda}'=\mathbf{0},$$

da cui si ha il SL

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\frac{1}{2}\left(-\mathbf{b}+\mathbf{C}'\boldsymbol{\lambda}'\right).$$

Il vettore $\boldsymbol{\lambda}$ è poi determinato imponendo che il vettore $\mathbf{x}$ soddisfi il vincolo $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$.

La condizione sufficiente del secondo ordine richiede il calcolo degli ultimi $n - m$ minori principali di NW della matrice Hessiana orlata

$$\mathbf{H}_L = \left[\begin{array}{cc} 0 & -\mathbf{C} \\ -\mathbf{C}' & 2\mathbf{A} \end{array} \right].$$

]

DOMANDA 23

Mediante il metodo per sostituzione, risolvere, se possibile, il problema di ottimo vincolato

$$\begin{aligned} & ott. x_1 x_3 + \log(x_1 + x_2) \\ sub\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

R.

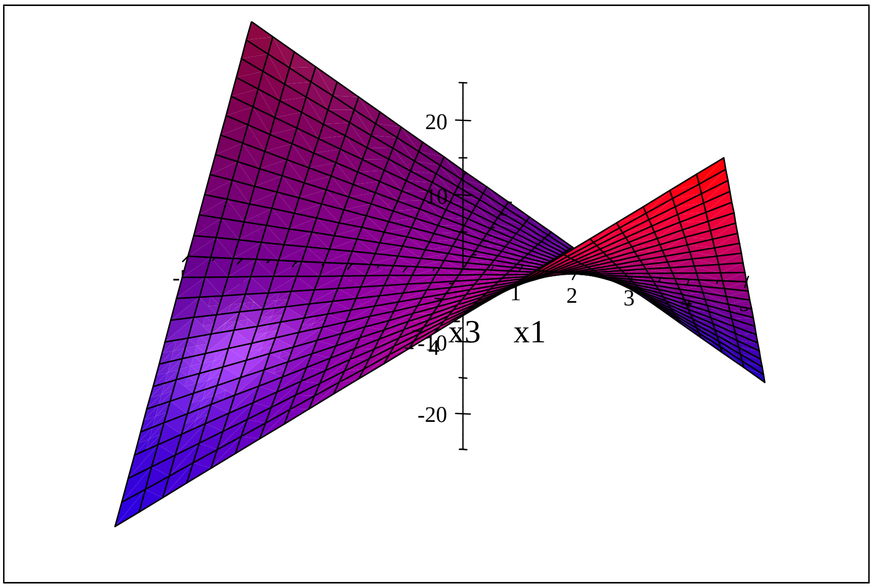
Mediante la sostituzione la funzione obiettivo diviene

$$g(x_1, x_3) = f(x_1, 1 - x_1, x_3) = x_1 x_3 + \log(x_1 + 1 - x_1) = x_1 x_3.$$

Il punto stazionario della funzione $g : R^2 -> R$ è dato da $x_1 = 0, x_3 = 0$ (infatti $\nabla g = \left[\begin{array}{cc} x_3 & x_1 \end{array} \right]$). La matrice Hessiana è però data da

$$H = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right],$$

i cui m.p. di NW sono 0 e -1. Quindi la matrice è indefinita e il punto $x_1 = 0, x_3 = 0$ individua un pto di sella per g, come illustrato in figura.



DOMANDA 24
Scrivere la funzione Lagrangiana del problema di ottimo vincolato

$$\begin{aligned} & ott.x_1 x_3 + \log(x_1 + x_2) \\ sub\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

R.
Nel problema in esame, la funzione Lagrangiana è data da

$$L(x, \lambda) = x_1 x_3 + \log(x_1 + x_2) + \lambda(1 - x_1 - x_2).$$

I pti stazionari di $L(x, \lambda)$ sono individuati risolvendo il SL

$$\begin{cases} x_3 + \frac{1}{x_1+x_2} - \lambda = 0 \\ +\frac{1}{x_1+x_2} - \lambda = 0 \\ x_1 = 0 \\ 1 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene l'unica soluzione

$$\hat{x}_1 = 0, \hat{x}_2 = 1, \hat{x}_3 = 0, \hat{\lambda} = 1.$$

La matrice Hessiana orlata di L è data da:

$$H_L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{(x_1+x_2)^2} & -\frac{1}{(x_1+x_2)^2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{(x_1+x_2)^2} & -\frac{1}{(x_1+x_2)^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e nel pto stazionario abbiamo

$$H_L\left(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{(0+1)^2} & -\frac{1}{(0+1)^2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{(0+1)^2} & -\frac{1}{(0+1)^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per determinare la natura del pto stazionario dobbiamo calcolare gli ultimi $n-m = 3-1 = 2$ m.p. di NW. In particolare, il MP di ordine 3 è il determinante della sotto-matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

che è pari a 0. Quindi sicuramente $\left(\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}', \hat{\lambda} = 1\right)$ non può essere pto di sella per la Lagrangiana e quindi

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

non è un estremo per il pb di ottimo vincolato. Il problema non ammette soluzione.

DOMANDA 25

Determinare i punti stazionari e il moltiplicatore della funzione Lagrangiana associati al problema di ottimo vincolato della domanda precedente.

R. Vedi risposta 24

DOMANDA 26

Determinare, attraverso la condizione sulla matrice hessiana orlata, se i punti stazionari della funzione Lagrangiana del punto precedente consentono di individuare un punto di ottimo del problema vincolato.

R. Vedi risposta 24

DOMANDA 27

Determinare, attraverso l'utilizzo delle curve di livello, l'eventuale soluzione del seguente problema di ottimo:

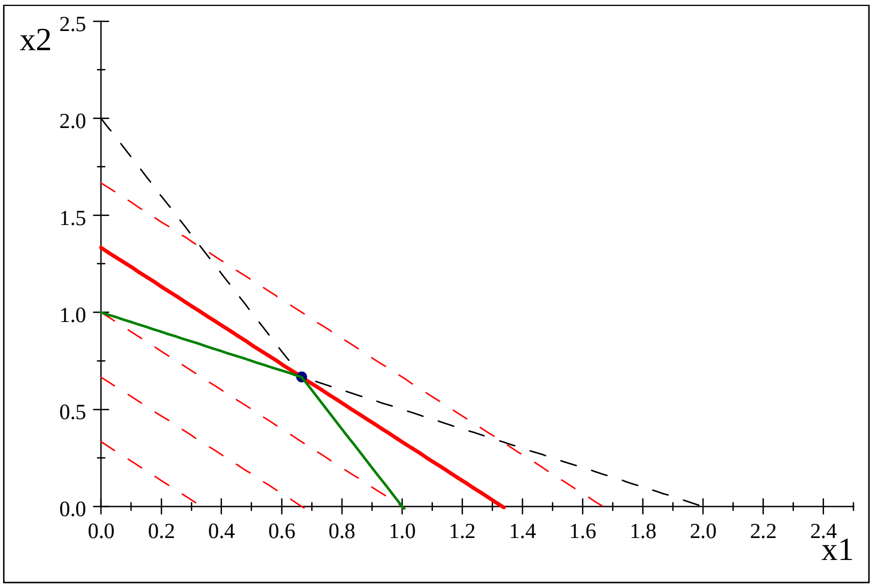
$$\begin{array}{rcl} & & \max x_1 + x_2 \\ & & sub \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 0 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 0 \\ x_1 & \geq & 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

R. La regione ammissibile degenera nella sola origine del piano bidimensionale. Quindi l'origine, essendo anche l'unico punto di scelta, rappresenta anche la soluzione del problema.

Varianti

1) [PIU INTERESSANTE] Risolvere il pb

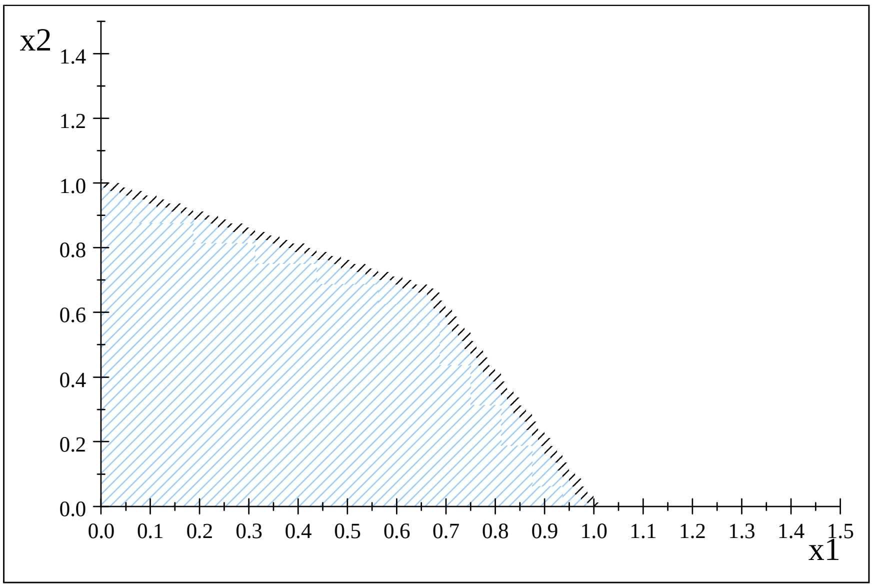
$$\begin{array}{rcl} & & \max x_1 + x_2 \\ & & sub \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 2 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ x_1 & \geq & 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Le curve di livello sono in rosso tratteggiato. Le linee in verde individuano la regione ammissibile. Il punto in blu è il punto di ottimo.

In figura (**??**) sono illustrate le curve di livello della funzione obiettivo (individuate dall'equazione $x_2 = k - x_1$, dove $k \in R$), le rette che delimitano la regione ammissibile ($x_2 = 1 - x_1/2$ e $x_2 = 2 - 2x_1$). Il punto di ottimo è dato dal vertice della regione ammissibile: in questo punto (individuato dalle coordinate $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$) si raggiunge il valore massimo della funzione obiettivo (pari a 4/3).

$$\left[\; x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad 2x_1 + x_2 \leq 2 \; \right]$$



Regione ammissibile del problema

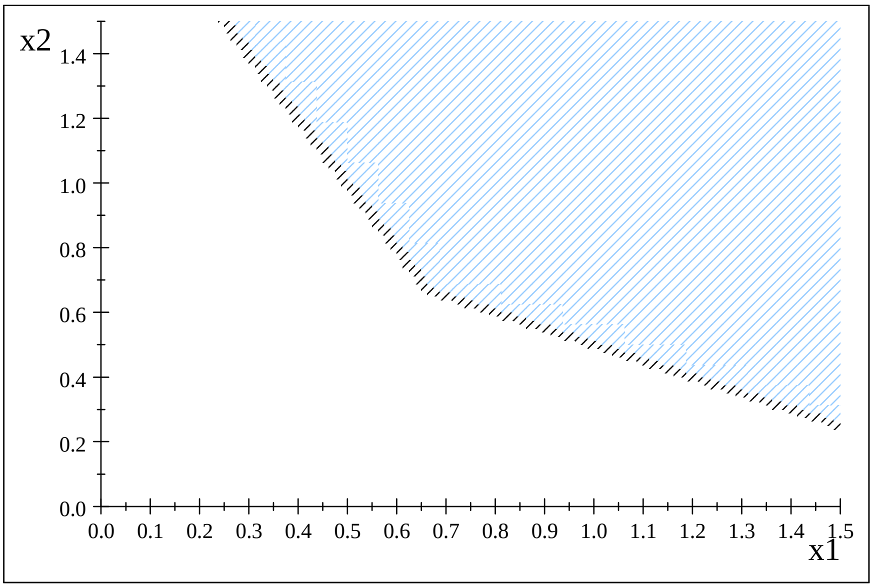
2) Risolvere il pb

$$\begin{aligned} & \min x_1 + x_2 \\ & sub \\ x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La regione ammissibile è la stessa del problema precedente. Ma dovendo minimizzare la funzione obiettivo, il punto di ottimo viene a coincidere con l'origine. Se il problema fosse stato

$$\begin{aligned} & \min x_1 + x_2 \\ & sub \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

la regione ammissibile sarebbe stata l'area del primo quadrante complementare alla regione del problema precedente ed è illustrata in figura (**??**).



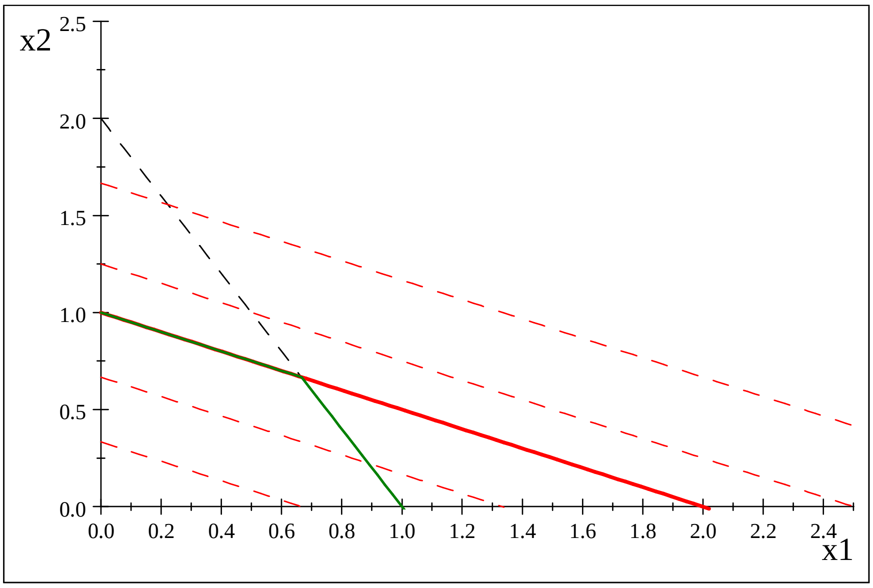
Regione ammissibile del problema

Il punto di minimo sarebbe stato $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{2}{3}$.

3) Risolvere il pb

$$\begin{aligned} & \max x_1 + 2x_2 \\ & sub \\ x_1 + 2x_2 & \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 2 \\ x_1 & \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

In questo caso la regione ammissibile è come nella variante 1, ma le curve di livello hanno pendenza pari -1/2. Questo fa si che un lato della frontiera ammissibile coincida con parte della curva di livello (quella associata al livello 1). La conseguenza è che questo problema ammette infinite soluzioni: tutti i punti che stanno sul segmento $x_2 = 1 - x_1/2$, per $0 \leq x_1 \leq \frac{2}{3}$.



Le curve di livello sono in rosso tratteggiato. Le linee in verde individuano la regione ammissibile. Il segmento della frontiera ammissibile che coincide con la curva di livello in rosso grassetto individua infiniti punti di ottimo.