Metodi matematici 2 — 17 gennaio 2008

TEST

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Rispondere alle dieci domande sbarrando la casella che si ritiene corretta nel caso di risposta multipla (una sola risposta è corretta). Si indichi la risposta ma non il procedimento in caso di risposta aperta. Nel caso si intenda annullare una risposta cerchiare la corrispondente casella. CIFRE CORRETTE AL SECONDO DECIMALE, TASSI IN FORMA PERCENTUALE.

Risposte corrette	10	9	8	7	6	5	altrimenti	
Punteggio	24	23	22	21	20	18	INS	50 min.

1 - Si **acquista** un BOT con scadenza 9 mesi al prezzo di 96.2. All'emissione, 3 mesi prima, il prezzo era stato di 95. Il rendimento al **netto** delle tasse nell'ipotesi che si detenga il titolo sino a scadenza è (si prescinda dalle convenzioni di calcolo dei tempi):

R: ☐

2 - Si **acquista** un CTZ con scadenza residua 15 mesi al prezzo di 93.8. Era stato acquistato all'emissione (9 mesi fa) ad un prezzo di 91. Il tasso di rendimento realizzato al netto delle tasse è (si prescinda dalle convenzioni di calcolo dei tempi):

R: ☐

3 - Determinare il **prezzo secco** di un'obbligazione a cedola **semestrale** indicizzata al tasso spot a 6 mesi (fissata all'inizio del godimento della cedola), spread nullo, scadenza 5 anni, prossima cedola tra 4 mesi. Si prescinda da tasse e commissioni. I dati in possesso sono: cedola in corso corrispondente al 5% (annuo) e attuale tasso spot a 4 mesi pari al 4.5%.

R: ☐

4 - Un decisore con un costo opportunità del 10% per i prossimi 3 anni ed un capitale disponibile di 3000 valuta la possibilità di effettuare un investimento eventualmente congiunto all'attivazione di un finanziamento. I flussi delle due operazioni sono descritti nella tabella sottostante. Quale decisione risulta essere la più vantaggiosa?

tempi	0	1	2	3
Invest.	-2000	700	900	800
Finanz.	500	-250	-180	-170

☐ a non fare né inv. né fin.; ☐ b solo fin.; ☐ c inv. con fin.; ☐ d solo inv.;

5 - Si consideri un Btp scadente fra 2 anni a cedola annuale del 5%. Quanto deve quotare affinché il tasso interno di rendimento sia pari al 4.5%?

R: $\boxed{}$

6 - Si ammortizza su di un orizzonte di 2 anni, con il metodo **francese,** un debito di ammontare €100000 con **rate trimestrali** posticipate ad un tasso del 12.55% annuo. L'importo della rata è: **R:** $\boxed{}$

7 - Determinare l'insieme delle soluzioni (eventualmente coincidente con l'insieme vuoto nel caso di inesistenza) del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$ dove:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'insieme delle soluzioni è il seguente: $S =$

8 - Due gestori di portafoglio ripartiscono il proprio portafoglio tra due attività (p.e., non rischiosa e rischiosa) in proporzioni rispettivamente 0.9 e 0.1 il primo e 0.2 e 0.8 il secondo. In forma vettoriale, $\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$. La politica di gestione di un terzo gestore che ripartisse il proprio portafoglio tra le due attività nel seguente modo, $\begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.59 \end{bmatrix}$, potrebbe essere vista come una combinazione lineare delle politiche dei primi due gestori? In caso affermativo si indichino i coefficienti di tale c.l.:

R. SI, con coefficienti $a_1 =$, $a_2 =$, NO

9 - Un gestore di portafoglio deve ripartire un capitale di 100 tra 2 titoli che quotano rispettivamente 5 e 2. Il gestore desidera costruire un portafoglio replicante un fattore di rischio rispetto al quale i due titoli hanno sensibilità rispettivamente 0.4 e 1.2. Le quantità da detenere dei due titoli sono:

R: $n_1 =$ $n_2 =$.

10 - Si determinino le soluzioni del sistema omogeneo avente la seguente matrice dei coefficienti: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

R._________

Metodi matematici 2
Appello

17 gennaio 2008

Soluzioni Test

Domanda	Risultato
1	4.595%
2	4.682%
3	100.152
4	a
5	100.936
6	14246
7	$S = \varnothing$ (non esistono soluzioni)
8	$a_1 = 0.3$, $a_2 = 0.7$
9	$n_1 = 22.692, n_2 = -6.731$
10	$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Metodi matematici 2 — 17 gennaio 2008

TEST

Cognome	**Nome**	**Matricola**

Rispondere alle dieci domande sbarrando la casella che si ritiene corretta nel caso di risposta multipla (una sola risposta è corretta). Si indichi la risposta ma non il procedimento in caso di risposta aperta. Nel caso si intenda annullare una risposta cerchiare la corrispondente casella. CIFRE CORRETTE AL SECONDO DECIMALE, TASSI IN FORMA PERCENTUALE.

Risposte corrette	10	9	8	7	6	5	altrimenti	
Punteggio	24	23	22	21	20	18	INS	50 min.

1 - Si **acquista** un BOT con scadenza 9 mesi al prezzo di 96.2. All'emissione, 3 mesi prima, il prezzo era stato di 95. Il rendimento al **netto** delle tasse nell'ipotesi che si detenga il titolo sino a scadenza è (si prescinda dalle convenzioni di calcolo dei tempi):

R: 4.595%.

Il prezzo pagato dall'acquirente è pari alla somma del prezzo 96.2 con il rateo della ritenuta, $\frac{9}{12} \cdot 0.125 \cdot (100 - 95) = 0.46875$. Ovvero 96.66875. Il capitale che verrà riscosso alla scadenza è invece pari a 100. Dall'equazione $100 = 96.66875(1 + i9/12)$ si ricava la soluzione.

2 - Si **acquista** un CTZ con scadenza residua 15 mesi al prezzo di 93.8. Era stato acquistato all'emissione (9 mesi fa) ad un prezzo di 91. Il tasso di rendimento realizzato al netto delle tasse è (si prescinda dalle convenzioni di calcolo dei tempi):

R: 4.682%.

Il prezzo pagato dall'acquirente è pari al prezzo 93.8 cui è sottratto il rateo della ritenuta, $\frac{9}{24} \cdot 0.125 \cdot (100 - 91) = 0.42188$. Ovvero 93.378. Il capitale che verrà riscosso alla scadenza è invece pari a $100 - 0.125(100 - 91) = 98.875$. Dall'equazione $98.875 = 93.378(1 + i)^{15/12}$ si ricava la soluzione.

3 - Determinare il **prezzo secco** di un'obbligazione a cedola **semestrale** indicizzata al tasso spot a 6 mesi (fissata all'inizio del godimento della cedola), spread nullo, scadenza 5 anni, prossima cedola tra 4 mesi. Si prescinda da tasse e commissioni. I dati in possesso sono: cedola in corso corrispondente al 5% (annuo) e attuale tasso spot a 4 mesi pari al 4.5%.

R: 100.152.

Il corso secco ad ogni data di stacco cedola è pari a 100. Tra 4 mesi dunque il titolo varrà 100+ la cedola in pagamento. Per cui il corso tel quel ad oggi è $\left(100 + \frac{5}{2}\right)/(1 + 4.5\% \cdot 4/12) = 100.9852$ ed il corso secco si ottiene sottraendo da esso il rateo $\frac{2}{6}\frac{5}{2} = 0.83333$.

4 - Un decisore con un costo opportunità del 10% per i prossimi 3 anni ed un capitale disponibile di 3000 valuta la possibilità di effettuare un investimento eventualmente congiunto all'attivazione di un finanziamento. I flussi delle due operazioni sono descritti nella tabella sottostante. Quale decisione risulta essere la più vantaggiosa?

tempi	0	1	2	3
Invest.	-2000	700	900	800
Finanz.	500	-250	-180	-170

$\boxed{\text{a}}$ non fare né inv. né fin.; $\boxed{\text{b}}$ solo fin.; $\boxed{\text{c}}$ inv. con fin.; $\boxed{\text{d}}$ solo inv.;

R: a

E' sufficiente calcolare i van del solo investimento e del solo finanziamento e l'apv dell'operazione congiunta investimento con finanziamento (coincidente con la somma dei due van precedenti) per verificare che conviene non fare nulla e lasciare il proprio capitale investito nella gestione ordinaria.

5 - Si consideri un Btp scadente fra 2 anni a cedola annuale del 5%. Quanto deve quotare affinché il tasso interno di rendimento sia pari al 4.5%?

R: 100.936

Affinché il tir sia pari al 4.5% deve risultare

$$prezzo = \frac{5}{1.045} + \frac{105}{1.045^2}$$

da cui il risultato.

6 - Si ammortizza su di un orizzonte di 2 anni, con il metodo **francese,** un debito di ammontare €100000 con **rate trimestrali** posticipate ad un tasso del 12.55% annuo. L'importo della rata è:

R: 14246

Calcolato il tasso trimestrale $i_4 = (1+12.55\%)^{3/12} - 1$, e tenuto conto del numero di rate, 8, si ottiene facilmente il valore della rata dalla uguaglianza

$$100000 = Ra_{\overline{i_4}|8}$$

7 - Determinare l'insieme delle soluzioni (eventualmente coincidente con l'insieme vuoto nel caso di inesistenza) del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, dove:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'insieme delle soluzioni è il seguente: $S = \varnothing$.

Il rango di A è pari 2, quello di $A|b$ è pari a 3. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è impossibile. I due ranghi si calcolano facilmente riducendo la matrice orlata $A|b$; un esempio di matrice ridotta ottenuta da $A|b$ è $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

8 - Due gestori di portafoglio ripartiscono il proprio portafoglio tra due attività (p.e., non rischiosa e rischiosa) in proporzioni rispettivamente 0.9 e 0.1 il primo e

0.2 e 0.8 il secondo. In forma vettoriale, $\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$. La politica di gestione di un terzo gestore che ripartisse il proprio portafoglio tra le due attività nel seguente modo, $\begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.59 \end{bmatrix}$, potrebbe essere vista come una combinazione lineare delle politiche dei primi due gestori? In caso affermativo si indichino i coefficienti di tale c.l.:

R. SI, con coefficienti $a_1 = 0.3, a_2 = 0.7$

Occorre verificare se sia possibile esprimere il vettore $\begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.59 \end{bmatrix}$ come combinazione dei vettori $\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$, ovvero

$$\begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.59 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Trattasi di un semplicissimo sistema 2x2 che ammette come soluzione quella mostrata.

9 - Un gestore di portafoglio deve ripartire un capitale di 100 tra 2 titoli che quotano rispettivamente 5 e 2. Il gestore desidera costruire un portafoglio replicante un fattore di rischio rispetto al quale i due titoli hanno sensibilità rispettivamente 0.4 e 1.2. Le quantità da detenere dei due titoli sono:

R: $n_1 = 22.692, n_2 = -6.731$

Il sistema che riassume i vincoli di budget e di sensibilità desiderata è

$$\begin{cases} 5n_1 + 2n_2 & = 100 \\ 0.4n_1 + 1.2n_2 & = 1 \end{cases}$$

da cui le soluzioni facilmente calcolabili.

10 - Si determinino le soluzioni del sistema omogeneo avente la seguente matrice dei coefficienti: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{R} : x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

A è quadrata; conviente calcolarne il determinante, che risulta diverso da zero. Per cui le colonne della matrice sono l.i. ed il sistema ammette una sola soluzione che non può che essere il vettore nullo.

Metodi matematici 2	17 gennaio 2008	
Parte B		
Cognome	**Nome**	**Matricola**

Tempo a disposizione 50 min.

Algebra Lineare

Si discuta e risolva al variare del parametro reale a il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ dove

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Matematica Finanziaria

Sui mercati finanziari si leggono le seguenti informazioni: $i^{(0)}(0,1) = 4\%$, $P^{(0)}(0,2) = 0.91573$, BTP con scadenza a 3 anni, cedola annuale del 5%, quotato al prezzo tel quel di 100.

1. Si determinino il tasso $i^{(0)}(0,2)$, il prezzo $P^{(0)}(0,3)$;

2. Si consideri la posizione di un decisore con un budget di €50000 che come gestione ordinaria investe sul mercato finanziario sopra descritto. Gli si presenta la possibilità di effettuare la seguente operazione

Epoche	0	1	2	3
Flussi	−40000	20000	20000	10000

   potendo accedere ai 2 seguenti finanziamenti al fine di finanziarsi per la parte di capitale mancante:
   a) Finanziamento di €20000 da restituirsi in 3 anni con ammortamento italiano al tasso del 4.5%, attivabile anche solo per una frazione, α, dello stesso. Frazione che deve però stare tra il 50% ed il 100%, $\alpha \in [0.5\ ,\ 1]$
   b) Finanziamento per scoperto di conto con la propria banca al tasso del 6%. L'ammontare dell'indebitamento può essere scelto a piacere così come il rimborso da effettuarsi entro al massimo i prossimi 3 anni.
   Gli conviene effettuare l'operazione? Gli converrebbe indebitarsi e come?

Metodi matematici 2		17 gennaio 2008
SOLUZIONE Parte B		
Cognome	**Nome**	**Matricola**

Tempo a disposizione 50 min.

Algebra Lineare

Si discuta e risolva al variare del parametro reale a il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ dove

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & a \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE -

Dal momento che la matrice è quadrata possiamo calcolarne il determinante che risulta pari a $2 - 2a$. Perciò se $a \neq 1$ le colonne sono indipendenti e si ha la sola soluzione nulla. Nel caso in cui invece $a = 1$ per riduzione si ott

Matematica Finanziaria

Sui mercati finanziari si leggono le seguenti informazioni: $i^{(0)}(0,1) = 4\%, P^{(0)}(0,2) = 0.91573$, BTP con scadenza a 3 anni, cedola annuale del 5%, quotato al prezzo tel quel di 99.

1. Si determinino il tasso $i^{(0)}(0,2)$, il prezzo $P^{(0)}(0,3)$;

2. Si consideri la posizione di un decisore con un budget di €25000 che come gestione ordinaria investe sul mercato finanziario sopra descritto. Gli si presenta la possibilità di effettuare la seguente operazione

Epoche	0	1	2	3
Flussi	−40000	20000	20000	10000

   potendo accedere ai 2 seguenti finanziamenti al fine di finanziarsi per la parte di capitale mancante:
   a) Finanziamento di €20000 da restituirsi in 3 anni con ammortamento italiano al tasso del 6%, attivabile anche solo per una frazione, α, dello stesso. Frazione che deve però stare tra il 50% ed il 100%, $\alpha \in [0.5\ ,\ 1]$
   b) Finanziamento per scoperto di conto con la propria banca al tasso del 7%. L'ammontare dell'indebitamento può essere scelto a piacere entro una soglia di €20000, così come il rimborso da effettuarsi entro al massimo i prossimi 3 anni.
   Gli conviene effettuare l'operazione? Gli converrebbe indebitarsi e come?

SOLUZIONE -

1. Si ha $i^{(0)}(0,2) = (1/0.91573)^{0.5} - 1 = 4.5\%$. Con la tecnica del bootstrapping otteniamo il tasso spot mancante:

$$99 = \frac{5}{1.04} + 5 \cdot 0.91573 + \frac{105}{(1 + i^{(0)}(0.3))^3} \Longrightarrow i^{(0)}(0.3) = 5.42\% \text{ o } P^{(0)}(0,3) = 85.35$$

2. Entrambi i finanziamenti hanno costi più elevati dei costi opportunità del decisore. Sicché il finanziamento (qualunque esso sia deve essere ridotto allo stretto necessario, ossia €15000).

   Il primo finanziamento verrebbe dunque attivato per una percentuale $\alpha = \frac{15000}{20000} = 0.75$. I flussi sarebbero perciò

Epoche	0	1	2	3
Flussi	15000	−5900	−5600	−5300

   Il secondo finanziamento verrebbe attivato sempre per €15000 ma verrebbe estinto al tempo 1 utilizzando il flusso derivante dai ricavi dell'investimento per ripagarlo completamente. Dunque

Epoche	0	1
Flussi	15000	−16050

   I due APV risultano:

$$G_{I+1^\circ Fin} = -25000 + \frac{14100}{1.04} + \frac{14400}{1.045^2} + \frac{4700}{1.0542^3} = 5755.9$$
$$G_{I+2^\circ Fin} = -25000 + \frac{3950}{1.04} + \frac{20000}{1.045^2} + \frac{10000}{1.0542^3} = 5648.2$$

   Si può concludere naturalmente che risulta conveniente effettuare l'operazione finanziandosi con il primo finanziamento.