Esame di prova di Metodi Matematici, laurea in Scienze dei Materiali, Vercelli 1.12.2015

Parte A: sei verifiche preliminari (da completare e consegnare entro i primi 20 minuti). E' necessario rispondere correttamente ad almeno quattro di esse per superare lo scritto.

1) Calcolare $\sum_{n=3}^{30} n$

2) In quanti modi diversi posso mettere in fila 5 oggetti differenti?

3) Quanti sono i sottoinsiemi di 3 oggetti di un insieme di 5 oggetti?

4) In quale quadrante del piano complesso giace $(1+i)^{203}$?

5) Espandere in serie di potenze $\sinh(-x)$.

6) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

Parte B: 5 esercizi

Esercizio 1 Definire la funzione esponenziale di numero reale e di numero complesso. Disegnare l'immagine (sotto la funzione esponenziale) del punto $1+\frac{3}{2}i$; della retta di eq. $x=0$; del secondo quadrante. Risolvere l'equazione $e^z = 1$ quante soluzioni vi sono? Risolvere l'equazione $e^z=\sqrt{3}-i$, quante soluzioni vi sono?

Esercizio 2 Un sistema di oscillatori quantistici di frequenza ν ed alla temperatura T ha un'energia media

$$<E>=\frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}$$

dove $x = hv/kT$, h è la costante di Planck e k quella di Boltzmann. Si mostri che entrambe le serie convergono e se ne calcoli il valore e quindi l'espressione generale per $<E>$.

Si verifichi che ad alte frequenze ν si ha $<E>\simeq hve^{-h\nu/kT}$ (ovvero si calcoli $\lim_{\nu\to\infty} <E>/hve^{-h\nu/kT}$).

Si verifichi che ad alte temperature $<E>\simeq kT$ (ovvero si calcoli $\lim_{T\to\infty} <E>/kT$).

Nota: l'andamento $<E>\simeq kT$ per alte temperature, o equivalentemente per $h\to 0$, corrisponde al limite classico della radiazione di corpo nero. L'andamento $<E>\simeq hve^{-h\nu/kT}$ ad alte frequenze risolve il problema della "catastrofe ultravioletta" per il corpo nero.

Esercizio 3 Calcolare il centro e il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3}{2}z+i\right)^n .$$

Studiarne la convergenza su quei punti di frontiera che hanno parte immaginaria uguale alla parte immaginaria del centro della serie.

Esercizio 4 Determinare i coefficienti a_n tali che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sia soluzione dell'equazione differenziale $f''(x)=-9f(x)$ con condizioni iniziali $f(0)=1$, $f'(0)=3$. Riconoscere la funzione nota corrispondente alla somma della serie.

Esercizio 5 Si disegni la funzione periodica di periodo L definita da $f(x)=0,\ x\in(-\frac{L}{4},\frac{L}{4})$ e $f(x)=2$ per $x\in[\frac{L}{4},\frac{3}{4}L]$. Se ne determini: la parità, il primo termine non nullo della serie di Fourier, la serie di Fourier. (suggerimento: si integri in $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ e si analizzino i casi n pari e n dispari, e i sottocasi $n=4p+1$ e $n=4p+3$).

Un altro problema sulle serie di Fourier potrebbe essere:

Esercizio 6 a) Si disegnino le funzioni $\cos(-x)$, $2\sin(x)$, $\sin(2x)$, $\cos(3x)$, $\cos(4x)$ nell' intervallo $[-2\pi,2\pi]$. Si individui il periodo di dette funzioni.
b) Si disegni la funzione periodica di periodo L definita da $f(x)=x,\ x\in[0,L)$. Si determini: il primo termine non nullo della serie di Fourier, la serie di Fourier. Si spieghi, tramite argomenti di parità, la nullità di alcuni coefficienti.