Differenziazione per funzioni di più variabili

1 novembre 2011

1 Derivate parziali

In questa sezione denoteremo con A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) e con f una funzione da A a valori in $\mathbb{R}^M$ ($M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).

Definizione 1.1 *Sia $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e $x_o \in A$. Si dice derivata direzionale di f in x_o lungo il vettore (o la direzione) u il limite (se esiste finito)*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + tu) - f(x_o)}{t}. \tag{1.1}$$

In tal caso, la derivata direzionale si indica con uno dei seguenti simboli

$$D_u f(x_o), \qquad \partial_u f(x_o), \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(x_o).$$

Nella Figura 1 sono rappresentati i punti x_o e $x_o + tu$ che compaiono in (1.1). Si noti che $D_u f(x_o)$ coincide con la derivata in 0 della funzione $g : I \to \mathbb{R}$, definita da $g(t) = f(x_o + tu)$ per ogni $t \in I$, dove I è un opportuno intorno di 0.

Lemma 1.2 *Sia $x_o \in A$, $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e $\lambda \in R \setminus \{0\}$. Se f è derivabile in x_o lungo la direzione u, allora f è derivabile in x_o lungo la direzione $v = \lambda u$ e vale*

$$D_v f(x_o) = \lambda D_u f(x_o). \tag{1.2}$$

Dimostrazione. Si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + tv) - f(x_o)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + t\lambda u) - f(x_o)}{t} \\ &= \lambda \lim_{s \to 0} \frac{f(x_o + su) - f(x_o)}{s} = \lambda D_u f(x_o). \end{aligned}$$

Pertanto si conclude che $D_v f(x_o)$ esiste e vale $\lambda D_u f(x_o)$. □

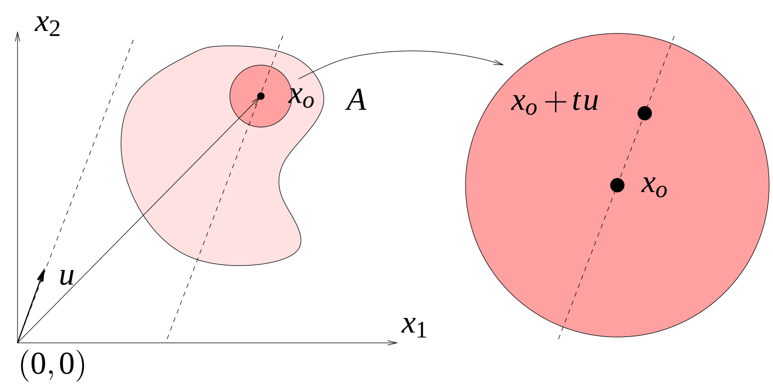

Figura 1: I punti x_o e $x_o + tu$ nel calcolo della derivata direzionale.

Osservazione 1 *Si consideri la base canonica $\{e_1, \ldots, e_N\}$ di $\mathbb{R}^N$. La derivata direzionale $D_{e_i} f(x_o)$ ($i \in \{1, \ldots, N\}$) si ottiene derivando la funzione f come se fosse funzione della sola variabile x_i, considerando costanti tutte le altre variabili.*

Definizione 1.3 *Si chiamano derivate parziali di f le derivate direzionali fatte lungo un vettore della base canonica di $\mathbb{R}^N$. Le derivate direzionali in un punto x_o si indicano con uno dei seguenti simboli*

$$D_{x_i} f(x_o), \qquad \partial_{x_i} f(x_o), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_o).$$

Le derivate parziali e/o direzionali non implicano la continuità di f, come risulta dai seguenti esempi.

Esempio 1.4 *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x,y) = 1$ se $xy \neq 0$ e da $f(x,y) = 0$ altrimenti. Chiaramente f non è continua in $(0,0)$, ma esistono entrambe le derivate parziali in $(0,0)$ e valgono*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Si noti che tutte le derivate direzionali, fatte lungo un vettore $u \neq 0$ non parallelo sia e_1 che a e_2, non esistono.

Esempio 1.5 *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases} \tag{1.3}$$

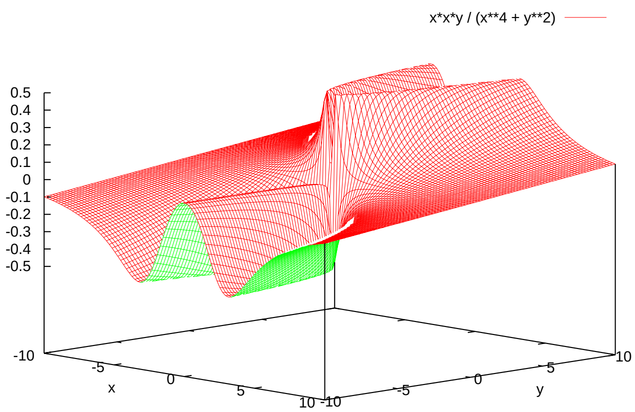

Figura 2: Grafico della funzione definita in (1.3).

vedi Figura 2. La funzione f *non è continua in* $(0,0)$. *Infatti*

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \frac{1}{2}, \qquad e \qquad \lim_{x\to 0} f(x,x) = 0.$$

Sia ora $u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$ *un vettore diverso da* $(0,0)$. *Si vede facilmente che la derivata direzionale di* f *esiste per ogni tale* u *e*

$$D_u f(0,0) = \begin{cases} 0, & se\ u_2 = 0, \\ \frac{u_1^2}{u_2}, & se\ u_2 \neq 0. \end{cases}$$

Proposizione 1.6 *Siano* $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ *e* $t > 0$ *tale che* $B \subseteq A$, *dove*

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^N : x = \lambda x_o + (1-\lambda)(x_o + tu), \lambda \in [0,1]\right\}.$$

Supponiamo che la derivata direzionale $D_u f(x)$ *esista per ogni* $x \in B$ *e sia continua su B. Allora*

$$f(x_o + tu) = f(x_o) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}(x_o + su)\, ds. \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Si consideri la funzione $g : [0,t] \to \mathbb{R}^M$, definita da $g(s) = f(x_o + su)$ per ogni $s \in [0,t]$. Si verifica facilmente che $g(0) = f(x_o)$, $g(t) = f(x_o + tu)$ e $g'(s) = \frac{\partial f}{\partial u}(x_o + su)$ per ogni $s \in (0,t)$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale segue che

$$g(t) = g(0) + \int_0^t g'(s)\, ds,$$

da cui la tesi. □

2 Differenziale

In questa sezione denoteremo con A un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) e con f una funzione da A a valori in $\mathbb{R}^M$ ($M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).

Definizione 2.1 *Sia $x_o \in A$. La funzione f si dice differenziabile (o Fréchet differenziabile) in x_o se esiste una funzione lineare e continua $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ tale che*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{\| f(x) - f(x_o) - T(x - x_o)\|_{\mathbb{R}^M}}{\|x - x_o\|_{\mathbb{R}^N}} = 0. \tag{2.5}$$

Proposizione 2.2 *Sia $x_o \in A$ e supponiamo f differenziabile in x_o. Allora:*

1. *f è continua in x_o;*
2. *per ogni $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $D_u f(p) = T(u)$, dove $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ è una funzione lineare e continua che verifica (2.5);*
3. *esiste un'unica $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ lineare e continua che verifica (2.5).*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ lineare e continua che verifica (2.5). Allora segue che

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to x_o} \| f(x) - f(x_o) - T(x - x_o)\|_{\mathbb{R}^M} \\ = \quad & \lim_{x \to x_o} \frac{\| f(x) - f(x_o) - T(x - x_o)\|_{\mathbb{R}^M}}{\|x - x_o\|_{\mathbb{R}^N}} \|x - x_o\|_{\mathbb{R}^N} = 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{x \to x_o} [f(x) - f(x_o) - T(x - x_o)] = 0. \tag{2.6}$$

Dato che

$$\lim_{x \to x_o} T(x - x_o) = T\left(\lim_{x \to x_o}(x - x_o)\right) = T(0) = 0,$$

si ottiene che

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o),$$

e quindi f è continua in x_o.

Sia ora $u \in \mathbb{R}^N$, $u \neq 0$. Per (2.5) si deduce che

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \to 0} \frac{\| f(x_o + tu) - f(x_o) - T(x_o + tu - x_o)\|_{\mathbb{R}^M}}{\|x_o + tu - x_o\|_{\mathbb{R}^N}} \\ &= \frac{1}{\|u\|} \lim_{t \to 0} \frac{\| f(x_o + tu) - f(x_o) - tT(u)\|_{\mathbb{R}^M}}{|t|} \\ &= \frac{1}{\|u\|} \lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(x_o + tu) - f(x_o)}{t} - T(u) \right\|_{\mathbb{R}^M} \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + tu) - f(x_o)}{t} = T(u),$$

da cui segue che $D_u f(x_o)$ esiste e vale $T(u)$. Infine l'unicità di T segue dal fatto che $T(u) = D_u f(x_o)$ per ogni $u \in \mathbb{R}^N$, $u \neq 0$. □

Definizione 2.3 *Sia $x_o \in A$ e f differenziabile in x_o. L'applicazione $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M\right)$ che verifica (2.5) si chiama differenziale di f in x_o e si indica con uno dei seguenti simboli*

$$f'(x_o) \qquad\qquad Df(x_o) \qquad\qquad \partial f(x_o).$$

Osservazione 2 *Se f differenziabile in x_o, allora, per ogni $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, vale*

$$D_u f(x_o) = f'(x_o)(u).$$

Osservazione 3 *Se $N = 2$, $M = 1$ e se f è differenziabile in $(x_o, y_o) \in A$, allora il piano descritto dall'equazione parametrica*

$$\big(x, y, f(x_o, y_o) + f'(x_o, y_o)\,(x - x_o, y - y_o)\big)$$

al variare di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ coincide con il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_o, y_o, f(x_o, y_o))$.

Osservazione 4 *Sia f differenziabile in x_o. Allora $f'(x_o) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^M\right)$ e quindi si può rappresentare mediante una matrice con M righe e N colonne. Rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^M$, tale matrice ha la forma*

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x_o) & \partial_{x_2} f_1(x_o) & \cdots & \partial_{x_N} f_1(x_o) \\ \partial_{x_1} f_2(x_o) & \partial_{x_2} f_2(x_o) & \cdots & \partial_{x_N} f_2(x_o) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_M(x_o) & \partial_{x_2} f_M(x_o) & \cdots & \partial_{x_N} f_M(x_o) \end{pmatrix}.$$

Vale il seguente risultato, che dà delle condizioni sufficienti affinché una funzione sia differenziabile.

Teorema 2.4 ***(Teorema del differenziale totale).*** *Sia $x_o \in A$. Supponiamo che esista $\bar{r} > 0$ tale che le derivate parziali*

$$\partial_{x_1} f(x) \quad \partial_{x_2} f(x) \quad \cdots \quad \partial_{x_N} f(x),$$

esistono per ogni $x \in B(x_o, \bar{r})$ e sono continue in x_o. Allora f è differenziabile in x_o.

Esempio 2.5 *Si consideri la funzione*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & |xy|, \end{array} \tag{2.7}$$

il cui grafico è rappresentato in Figura 3. Sia $(x_o,y_o) \in \mathbb{R}^2$ tale che $x_o y_o \neq 0$. Per il Teorema 2.4, f è differenziabile in (x_o,y_o).
Sia $(x_o,y_o) = (0,y_o)$ con $y_o \neq 0$. In questo caso non esiste $\partial_x f(0,y_o)$ e quindi f non è differenziabile in (x_o,y_o).
Sia $(x_o,y_o) = (x_o,0)$ con $x_o \neq 0$. In questo caso non esiste $\partial_y f(x_o,0)$ e quindi f non è differenziabile in (x_o,y_o).
Sia $(x_o,y_o) = (0,0)$. Si verifica facilmente che

$$\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0.$$

Pertanto se f fosse differenziabile in $(0,0)$, allora $f'(0,0)$ sarebbe la funzione costantemente uguale a 0. Il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{||xy| - 0 - 0|}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

vale 0 e quindi, per la Definizione 2.1, si conclude che f è differenziabile in $(0,0)$.

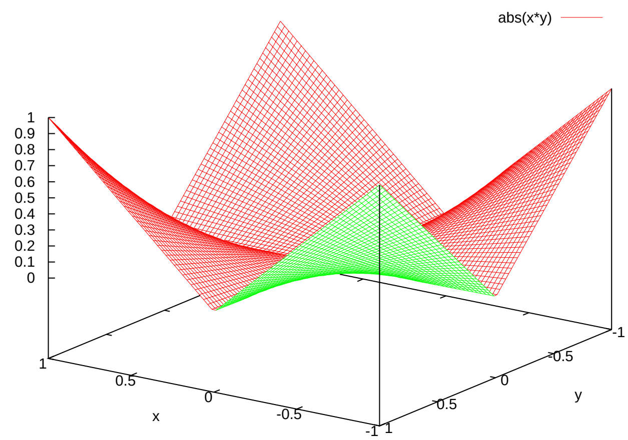

Figura 3: Grafico della funzione definita in (2.7).

Esercizio 1 *Si determinino i punti di differenziabilità delle seguenti funzioni.*

1.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & se\ (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & se\ (x,y)=(0,0). \end{cases} \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & se\ (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & se\ (x,y)=(0,0). \end{cases} \end{array}$$

Esercizio 2 *Per quali* $\alpha > 0$*, la funzione* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$*, definita da* $f(x,y,z) = \arctan\left(\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\right)$ *per ogni* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$*, è differenziabile in* $(0,0,0)$*?*

Proposizione 2.6 *Siano* $f:A\to\mathbb{R}^M$ *e* $g:A\to\mathbb{R}^M$ *due funzioni differenziabili in* $x_o\in A$*. Allora, per ogni* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$*, la funzione* $\alpha f+\beta g:A\to\mathbb{R}^M$ *è differenziabile in* x_o *e*

$$(\alpha f+\beta g)'(x_o) = \alpha f'(x_o)+\beta g'(x_o). \tag{2.8}$$

Proposizione 2.7 *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq \mathbb{R}^M$ due insiemi aperti e siano $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}^L$ due funzioni differenziabili rispettivamente in $x_o \in A$ e in $f(x_o)$. Allora la funzione composta $g \circ f$ è differenziabile in x_o e vale*

$$(g \circ f)'(x_o) = g'(f(x_o)) \circ f'(x_o). \tag{2.9}$$

Osservazione 5 *Siano $\{e_1, \ldots, e_N\}$ e $\{\ell_1, \ldots, \ell_M\}$ rispettivamente le basi canoniche di $\mathbb{R}^N$ e di $\mathbb{R}^M$. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq \mathbb{R}^M$ due insiemi aperti e siano $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}^L$ due funzioni differenziabili rispettivamente in $x_o \in A$ e in $f(x_o)$. Allora, per ogni $i \in \{1, \ldots, N\}$,*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(x_o) &= (g \circ f)'(x_o)(e_i) = g'(f(x_o)) \circ f'(x_o)(e_i) \\
&= g'(f(x_o)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_o) \right) = g'(f(x_o)) \left(\sum_{j=1}^{M} \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_o) \ell_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_o) \frac{\partial}{\partial y_j} g(f(x_o)).
\end{aligned}$$

3 Derivate successive

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^M$ una funzione differenziabile in ogni $p \in A$. Allora è possibile considerare la funzione

$$\begin{array}{rcl} f' : A & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M\right) \\ p & \longmapsto & f'(p). \end{array} \tag{3.10}$$

Allo stesso modo, se f' è differenziabile in ogni $p \in A$, si può considerare la funzione

$$\begin{array}{rcl} f'' : A & \longrightarrow & \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^N; \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M\right)\right) \\ p & \longmapsto & f''(p) \end{array} \tag{3.11}$$

e così via.

Definizione 3.1 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^M$ una funzione. f si dice di classe C^0 (e si indica $f \in C^0\left(A; \mathbb{R}^M\right)$) se è continua. Per ogni $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, f si dice di classe C^k (e si indica $f \in C^k\left(A; \mathbb{R}^M\right)$) se è continua e se, per ogni $l \in \{1, \ldots, k\}$, la funzione $f^{(l)}$ esiste ed è continua. Infine f si dice di classe C^∞ (e si indica $f \in C^\infty\left(A; \mathbb{R}^M\right)$) se $f \in C^k(A; \mathbb{R}^M)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.*

Osservazione 6 *Se $f \in C^2(A;\mathbb{R}^M)$, allora, per ogni $p \in A$, il differenziale secondo $f''(p)$ è un'applicazione bilineare*

$$f''(p) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^M.$$

Inoltre se $p \in A$ e $v,w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, si ha

$$\begin{aligned} f''(p)(v,w) &= f''(p)(v)(w) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f'(p+tv)-f'(p)}{t}\right)(w) \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{f'(p+tv)(w)-f'(p)(w)}{t}\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{D_w f(p+tv)-D_w f(p)}{t}\right) = D_v D_w f(p). \end{aligned}$$

Vale il seguente risultato, dovuto a Schwarz.

Teorema 3.2 ***(Schwarz)***. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $x_o \in A$, $v,w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e $f : A \to \mathbb{R}^M$ una funzione. Supponiamo che esista $\overline{r} > 0$ tale che $B(x_o,\overline{r}) \subseteq A$, $D_v D_w f(x)$ esista per ogni $x \in B(x_o,\overline{r})$ e sia continua in x_o. Allora $D_w D_v f(x_o)$ esiste e*

$$D_v D_w f(x_o) = D_w D_v f(x_o). \tag{3.12}$$

Osservazione 7 *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si vede facilmente che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \qquad e \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$$

e quindi (3.12) non vale per tale f. In particolare le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistono per ogni (x,y), ma non sono continue in $(0,0)$ e quindi non soddisfano le ipotesi del Teorema 3.2.

Corollario 3.3 *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $v,w \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e $f : A \to \mathbb{R}^M$ una funzione di classe C^2. Allora*

$$D_v D_w f(x) = D_w D_v f(x) \tag{3.13}$$

per ogni $x \in A$.

4 Formula di Taylor

Teorema 4.1 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto, sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^{n+1} e $x_o \in A$. Sia infine $\overline{r} > 0$ tale che $B(x_o, \overline{r}) \subseteq A$. Per ogni $x \in B(x_o, \overline{r})$, vale*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_o) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_o)(x-x_o)_i \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} (x-x_o)_{i_1} (x-x_o)_{i_2} + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_n=1}^{N} \frac{\partial^n f(x_o)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} (x-x_o)_{i_1} \cdots (x-x_o)_{i_n} \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{N} \frac{\partial^{n+1} f(\xi)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{n+1}}} (x-x_o)_{i_1} \cdots (x-x_o)_{i_{n+1}},
\end{aligned}
$$

dove ξ è un opportuno elemento del segmento congiungente x con x_o.

Dimostrazione. Sia $x \in B(x_o, \overline{r})$. Si consideri la funzione

$$
\begin{aligned}
g : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
t &\longmapsto f(x_o + t(x-x_o)).
\end{aligned}
$$

Si noti che g è di classe C^{n+1}. Lo sviluppo di Taylor di g centrato in 0 fino all'ordine n è dato da

$$
g(1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} + \frac{g^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}
$$

dove $\eta \in [0,1]$. Si noti che $g(1) = f(x)$, $g(0) = f(x_o)$ e

$$
g^{(k)}(0) = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\partial^k f(x_o)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} (x-x_o)_{i_1} \cdots (x-x_o)_{i_k}
$$

per ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$ e

$$
g^{(n+1)}(\eta) = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{N} \frac{\partial^{n+1} f(x_o + \eta(x-x_o))}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{n+1}}} (x-x_o)_{i_1} \cdots (x-x_o)_{i_{n+1}}.
$$

Pertanto si conclude ponendo $\xi = x_o + \eta(x-x_o)$. $\square$

5 Punti critici

Definizione 5.1 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $x_o \in A$ si dice punto critico (o stazionario) per f se f è differenziabile in x_o e il differenziale $f'(x_o)$ è la funzione nulla.*

Definizione 5.2 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $x_o \in A$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Se f possiede tutte le derivate seconde nel punto x_o, allora la matrice*

$$H_f(x_o) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_2 \partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_N \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_N \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x_o)}{\partial x_N^2} \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

si chiama matrice Hessiana di f nel punto x_o.

Osservazione 8 *Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2, allora la matrice Hessiana $H_f(x)$ esiste per ogni $x \in A$ e, per il Teorema 3.2, è una matrice simmetrica.*

Teorema 5.3 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $f : A \to R$ una funzione di classe C^2 e x_o un punto critico per f.*

1. *Se x_o è un punto di minimo relativo per f, allora $H_f(x_o)$ è semidefinita positiva.*

2. *Se x_o è un punto di massimo relativo per f, allora $H_f(x_o)$ è semidefinita negativa.*

3. *Se $H_f(x_o)$ è definita positiva, allora x_o è punto di minimo relativo stretto per f.*

4. *Se $H_f(x_o)$ è definita negativa, allora x_o è punto di massimo relativo stretto per f.*

5. *Se la forma quadratica associata alla matrice $H_f(x_o)$ assume valori sia positivi che negativi, allora x_o non è ne' un punto di minimo, ne' di massimo. In tal caso x_o si dice punto di sella.*

Teorema 5.4 ***(Moltiplicatori di Lagrange)****. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq \mathbb{R}^N$ aperti, $\overline{B} \subseteq A$ e siano $f \in C^1(A;\mathbb{R})$, $f \in C^1(B;\mathbb{R})$ due funzioni. Sia*

$$Z = \{x \in B : g(x) = 0\} \tag{5.15}$$

e sia $x_o \in Z$ tale che $\nabla g(x_o) \neq 0$. Supponiamo che esista $\overline{r} > 0$ tale che

$$f(x_o) \leq f(x) \qquad \forall x \in B(x_o, \overline{r}) \cap Z \tag{5.16}$$

o

$$f(x_o) \geq f(x) \qquad \forall x \in B(x_o, \overline{r}) \cap Z. \tag{5.17}$$

Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x_o) = \lambda \nabla g(x_o). \tag{5.18}$$

Esercizio 3 *Determinare la natura dei punti critici della funzione*

$$\begin{array}{rcc} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2 + y^2 + z^2 - xyz \end{array}$$

Esercizio 4 *Determinare la natura dei punti critici della funzione*

$$\begin{array}{rcc} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) - 3xy \end{array}$$

Esercizio 5 *Si consideri l'insieme*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x > 0\right\}$$

e la funzione

$$\begin{array}{rcc} f : D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & |y|\left(x^2 - y\right). \end{array}$$

Determinare (se esistono) il massimo e il minimo di f.

Esercizio 6 *Sia $s > 0$ e*

$$\begin{array}{rcc} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & xyz. \end{array}$$

Determinare

$$\inf_{(x,y,z) \in D} f(x,y,z) \qquad e \qquad \sup_{(x,y,z) \in D} f(x,y,z),$$

dove

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = s\right\}.$$

Dire infine se sono anche minimo e massimo.

Riferimenti bibliografici

[1] V. Barutello, M. Conti, D. L. Ferrario, S. Terracini, G. Verzini, Analisi Matematica, Volume 2, Apogeo, Milano, 2008.

[2] G. De Marco, Analisi Due/1, Decibel Zanichelli, Padova, 1992.

[3] G. Prodi, Analisi Matematica, Bollati Boringhieri, Torino, 1970.

[4] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, third edition, McGraw-Hill, 1964.